

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та  
природокористування  
Навчально-науковий інститут, автоматики, кібернетики та  
обчислювальної техніки  
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-  
інтегрованих технологій

**04-03-282**

### **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до практичних занять  
з навчальної дисципліни

#### **«Окремі питання теорії автоматичного управління технічних засобів автоматизації»**

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня  
за освітньо-професійною програмою

«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»  
спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані  
технології» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-  
методичною радою з якості  
ННІ АКOT  
Протокол № 8 від 29.04.2020 р.

Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Окремі питання теорії автоматичного управління технічних засобів автоматизації» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня ться за освітньо-професійною програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Клепач М. І., Клепач М. М. – Рівне : НУВГП, 2020. – 80 с.

Укладачі: Клепач М. І., к.ф.-м.н., доцент кафедри АЕКІТ;  
Клепач М. М., к.т.н., доцент кафедри АЕКІТ.

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., д.т.н., професор,  
завідувач кафедри АЕКІТ.

Керівник групи забезпечення спеціальності      Древецький В. В.

© М. І. Клепач,  
М. М. Клепач, 2020  
© НУВГП, 2020

## Зміст

	стор.
Вступ .....	4
1.Типові алгоритми промислових регуляторів	5
2.Інженерні методи оптимізації параметрів ПІД-регуляторів	24
3.Снтез АСР з типовими регуляторами	35
4.Виконавчі пристрої регуляторів	46
5.Синтез систем методом модального управління	58
6.Література	80
7.Додаток.	81

## ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Окремі питання теорії автоматичного управління технічних засобів автоматизації. Частина І» призначені для розширення і поглиблення знань здобувачів, отриманих на лекційних заняттях, та вироблення вмінь і навиків, необхідних для самостійного вирішення задач аналізу і синтезу сучасних систем управління технологічними об'єктами.

Тематика занять відповідає змісту навчальної програми даної дисципліни. Практичне заняття складається з короткого повторення теоретичного матеріалу, постановки задачі та її розв'язання, а також перевірки результатів шляхом комп'ютерного моделювання. Для закріплення навиків пропонуються завдання для самостійного опрацювання і аналізу отриманих результатів. При підготовці до практичного заняття необхідно вивчити матеріал за конспектом лекцій і літературними джерелами, зрозуміти методику їх розв'язання, ознайомитися з методами побудови комп'ютерних моделей.

Використання методичних вказівок до практичних занять з дисципліни «Окремі питання теорії автоматичного управління технічних засобів автоматизації. Частина І» посібника в навчальному процесі сприятиме оволодінню здобувачами навичок виконання розрахунків необхідних в інженерній справі, вдосконаленню кваліфікації фахівця, розвитку здатності до самостійного і творчого прийняття рішень.

# 1. ТИПОВІ АЛГОРИТМИ ПРОМИСЛОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ

## 1.1. Параметри та характеристики безперервних ПД-регуляторів

Наряду з успіхами інтелектуальних методів керування основне навантаження по керуванню промисловими об'єктами (більше 90%) несуть автоматичні системи регулювання з різними модифікаціями неперервних і цифрових ПД-регуляторів. ПД-алгоритми регулятора (*PID Control Algorithm*) (відомі з 1910 р) враховують не лише відхилення регульованої величини, але й напрям та швидкість її зміни, в цій мірі їх можна вважати реально працюючими інтелектуальними регуляторами.

ПД- регулятори розрізняють за алгоритмами, структурою, характером сигналів та додатковими блоками.

Для ідеалізованого PID - регулятора з класичною структурою (*classic*) закон керування

$$u_{pid}(t) = u_0 + K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (1.1)$$

де  $K_p$  - коефіцієнт передачі регулятора,  $T_i, T_d$  - постійні часу інтегруючої та диференціюючої складових регулятора відповідно,  $e$  - відхилення,  $u$  - керування.

Передаточна функція такого регулятора

$$W_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (1.2)$$

Параметри налаштування безперервного класичного ідеалізованого ПД-регулятора -  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ , а структурна схема показана на рис.1.1.

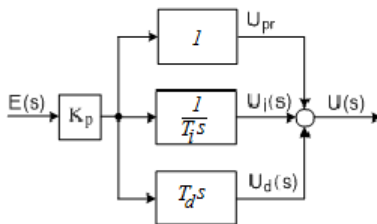


Рис. 1.1. Структура класичного ПД-алгоритму

При паралельній (*parallel*) реалізації ПІД-регулятора передаточна функція

$$W_p(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s, \quad (1.3)$$

а його структурна схема наведена на рис.1.2.

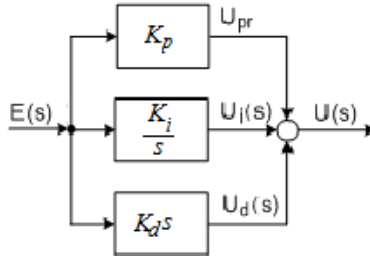


Рис. 1.2. Структура паралельного ПІД-алгоритму

Перехідна характеристика ідеальної диференціюючої ланки є імпульс безмежно великої амплітуди і не може бути ідеально відтворений в аналоговій чи цифровій системі, тому реалізувати можна лише реальну диференціюючу ланку з передаточною функцією

$$W_d(s) = \frac{K_d s}{T_F s + 1} \quad (1.4)$$

де  $T_F$  - постійна часу фільтра, Таким чином реальний безперервний ПІД-алгоритм

$$W_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_F s + 1} \right). \quad (1.5)$$

Сталу часу фільтра  $T_F$  вибирають на порядок меншою від  $T_d$ , щоб не компенсувати впливу диференціальної складової за формулою

$$T_F = \frac{T_d}{N}. \quad (1.6)$$

де  $N$  – коефіцієнт фільтрації (число в межах від 1 до 100).

З урахуванням (1.6) передаточна функція реального безперервного ПІД-регулятора приймає вигляд

$$W_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{Ns}{s + \frac{N}{T_d}} \right) \quad (1.7)$$

Перехідна характеристика реального ПІД-регулятора і його складових показана на рис.1.3.

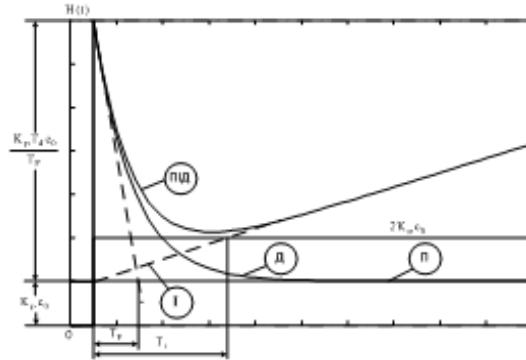


Рис. 1.3. Реакція ПІД-регулятора на ступінчастий вхідний сигнал

При моделюванні систем автоматичного регулювання в програмному середовищі Matlab з бібліотеки Simulink використовується блок безперервного PID(s) регулятора. В діалоговому вікні блока можна вибрати структуру регулятора паралельну або ідеальну (Ideal). Передаточна функція регулятора PID зі структурою Ideal

$$W_{pid}(s) = P \left( 1 + I \frac{1}{s} + D \frac{Ns}{1 + N \frac{1}{s}} \right) \quad (1.8)$$

В схемі даного регулятора (рис.1.4) зміна параметра  $P$  визиває зміни параметрів  $I$  і  $D$ .

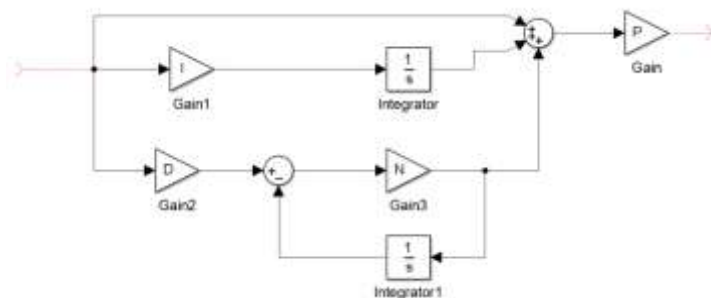


Рис.1.4. Структура ПІД-алгоритму типу ideal в Simulink

### Контрольні запитання

1. Як поділяються ПІД регулятори за структурною схемою?
2. Які налаштувальні параметри ПІД- регулятора?
3. Чому в диференціюючій частині ПІД-регулятора використовують реальну диференціюючу ланку?
4. Як відрізняється перехідна характеристика ідеального та реального ПІД- регулятора ?
5. Наведіть приклади статичних і астатичних регуляторів.

**Приклад 1.1.** Задано значення параметрів ідеального ПІД- регулятора з класичною структурою:  $K_p=2$ ;  $T_i=40$  с;  $T_d=10$  с. Знайти параметри еквівалентного регулятора при його моделюванні паралельною структурою.

Рішення:

Із порівняння виразів (1.2) і (1.3) слідує, що коефіцієнти передачі пропорційної складової регулятора однакові для обох структур , тобто  $K_p=2$ .

Тепер знайдемо коефіцієнт передачі інтегруючої складової регулятора з паралельною структурою

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{2}{40} = 0,05$$

Коефіцієнт передачі інтегруючої складової регулятора з паралельною структурою

$$K_d = K_p T_d = 2 \cdot 10 = 20$$

**Приклад 1.2.** Задано значення параметрів ідеального ПІД-регулятора з класичною структурою:  $K_p=2$ ;  $T_i=40$  с;  $T_d=10$  с.



Знайти параметри еквівалентного регулятора при використанні моделі ПД- алгоритму типу ideal в Simulink.

Рішення:

Із порівняння виразів (1.2) і (1.3) слідує, що коефіцієнти передачі пропорційної складової регулятора однакові для обох структур, тобто  $P=K_p=2$ .

Коефіцієнт передачі інтегруючої складової регулятора

$$I = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{40} = 0,025$$

Коефіцієнт передачі диференціюючої складової регулятора

$$D = T_d = 10$$

**Приклад 1.3.** Шляхом комп'ютерного моделювання отримати перехідні характеристики ПД- регулятора з паралельною структурою при  $K_p=1$ ;  $K_i=1$  с;  $K_d=1$  с. для різних значень коефіцієнта фільтрації:  $N=2$ ;  $N=10$ . Зробити висновок про вплив коефіцієнта фільтрації на характеристики регулятора.

Рішення:

Для дослідження впливу коефіцієнта фільтрації на перехідну характеристику ПД-регулятора побудуємо схему моделювання в Matlab/Simulink

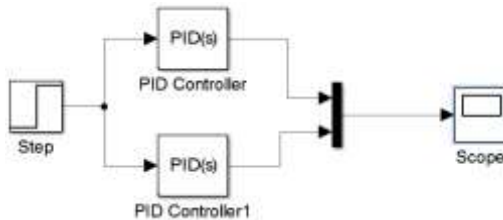


Рис. 1.5. Схема моделювання

В діалогових вікнах вказуємо задані параметри регулятора. Результати моделювання показано на рис.1.5.

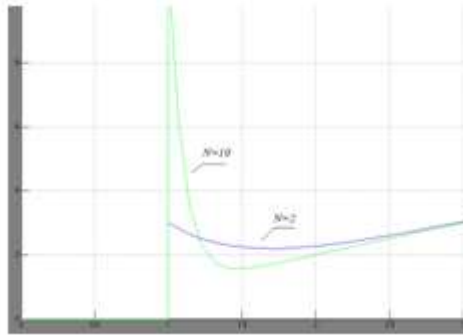


Рис. 1.5. Перехідні характеристики регуляторів при  $N=2$  і  $N=10$

З рис.1.5. видно, що при збільшенні  $N$  ефективність диференціальної складової регулятора збільшується. Амплітуда імпульсу збільшується, а тривалість зменшується. Іншими словами, при більших  $N$  властивості диференціальної ланки ближчі до ідеальної.

### **Завдання для самостійного вирішення**

**Приклад 1.4.** Задано значення параметрів ідеального ПІД- регулятора з класичною структурою:  $K_p=2$ ;  $T_i=40$  с;  $T_d=10$  с. Знайти параметри і побудувати перехідну характеристику відповідного йому ПІ- регулятора.

**Приклад 1.5.** Для ідеального ПІД- регулятора з класичною структурою:  $K_p=2$ ;  $T_i=40$  с;  $T_d=10$  с. Знайти параметри і побудувати перехідну характеристику відповідного йому ПІ- регулятора.

**Приклад 1.6.** За даними моделювання зробити висновок про порівняльні властивості П, ПІ тв. ПІД-регулятора.

## 1.2. Дискретні алгоритми PID-регуляторів

Дискретними називають ланки у яких відбувається квантування аналогової величини за часом чи за рівнем. Дискретизація за часом робить систему імпульсною, а дискретизація перетворює її на позиційну. В цифрових системах відбувається дискретизація і за часом і за рівнем. При високій розрядності сучасних аналого-цифрових перетворювачів (АЦП), ефектом від квантування за рівнем нехтують і аналізують цифрову систему застосовуючи математичний апарат лінійних імпульсних систем.

Квантування в часі полягає у заміні безперервного у часі сигналу його значеннями в окремі рівновіддалені моменти дискретизації  $T_0$ , а вихідна величина складається із модульованої послідовності імпульсів (рис.2.1). Розрізняють такі види імпульсної модуляції:

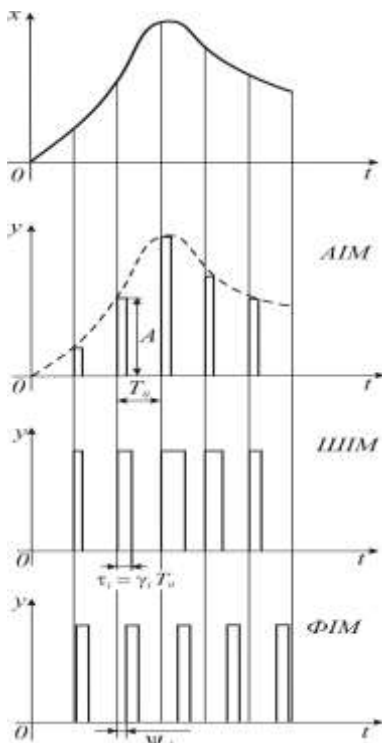


Рис.2.1. Види імпульсної модуляції.

Амплітудно - імпульсну модуляцію (АІМ), при якій змінюється амплітуда  $A$  вихідних імпульсів у залежності від значень вхідної величини в моменти квантування  $A_i = kx_i$ , де  $k$  - коефіцієнт передачі імпульсного елемента.

Широтно-імпульсну модуляцію (ШІМ), при якій змінюється ширина імпульсів  $\tau_i = \gamma T_0$  в залежності від значень вхідної величини в моменти квантування. Величину  $\gamma$  - називають відносною тривалістю імпульсів (скважністю).

Фазово-імпульсну модуляцію (ФІМ), при якій відбувається часовий зсув імпульсів  $\psi_i = \varepsilon T_0$  у залежності від значень вхідної величини в моменти квантування. Дискретизація по часу здійснюється імпульсними елементами.

Так як імпульсний елемент фіксує значення аналогової величини в окремі моменти часу, то аналіз імпульсної системи спрощується, якщо з безперервної функції  $x(t)$  утворити гратчасту функцію  $x[n]$ , визначену тільки в окремі дискретні моменти часу  $nT_0$ .

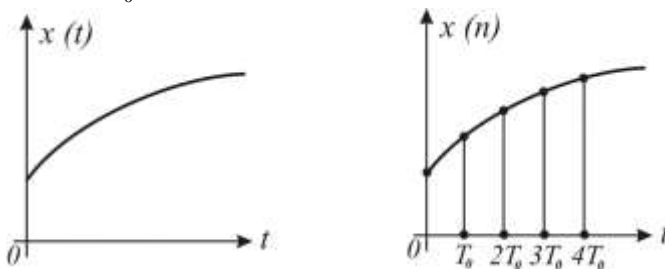


Рис.2.2. Заміна аналогової функції гратчастою функцією.

При аналізі імпульсний елемент розбивають на дві послідовно з'єднані ланки - ідеальну імпульсну ланку та формуючу ланку (рис.3.3). Ідеальна імпульсна ланка здійснює вибірку вхідного сигналу.

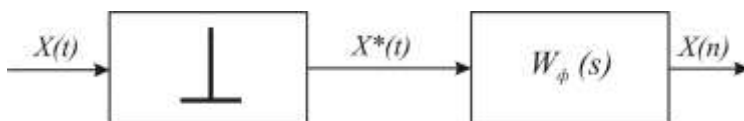


Рис.3.3. Структурна схема імпульсного елемента.

Вона є чисто імпульсним елементом, що генерує послідовність  $\delta$ -імпульсів. Площа імпульсів пропорційна величині вхідного сигналу в моменти квантування. Символічно це записують так:

$$x^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT_0) \delta(t - nT_0).$$

Формуюча ланка із кожного модульованого  $\delta$ -імпульсу формує прямокутний імпульс з амплітудою, пропорційною величині площі імпульсу. Реакція формуючої ланки на окремий  $\delta$ -імпульс є імпульсною перехідною характеристикою (ваговою функцією)  $w(t)$  ланки.

Прямокутний імпульс формуючої ланки можна легко утворити із двох одноступінчастих функцій, зсунутих в часі на величину тривалості імпульсу  $\tau = \gamma T_0$  (рис.2.4).

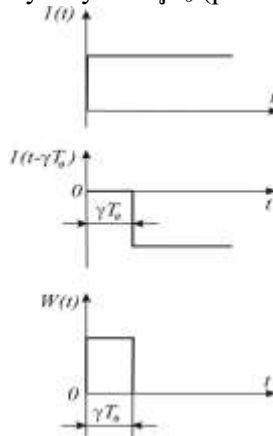


Рис.2.4. Формування прямокутного імпульсу формуючою ланкою.

Таким чином, отримують вираз для імпульсної перехідної характеристики формуючої ланки у вигляді

$$w_{\phi}(t) = 1(t) - 1(t - \tau)$$

Зображення Лапласа імпульсної перехідної характеристики є передаточною функцією формуючої ланки

$$W_{\phi}(s) = L\{w_{\phi}(t)\} = \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} = \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s}$$

При відносній тривалості імпульсів  $\gamma = 1$  формуючу ланку називають екстраполятором нульового порядку (*Zero Order Hold*).

Математичним апаратом дослідження цифрових систем є різницеві рівняння і дискретні зображення Лапласа від гратчастих функцій. Аналогом першої похідної для гратчастої функції є перша обернена різниця

$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1] \quad (2.1)$$

Відповідно аналогом другої похідної гратчастої функції є друга різниця. і так далі

$$\nabla^2 x[n] = \nabla x[n] - \nabla x[n-1] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \quad (2.2)$$

До гратчастої функції часу можна застосувати дискретне зображення Лапласа

$$X^*[s] = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n]e^{-nT_0s} \quad (2.3)$$

Якщо в дискретному зображенні Лапласа здійснити заміну

$$z = e^{T_0s}, \quad (2.4)$$

то отримане зображення називають  $Z$ - зображенням

$$X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n]z^{-n} \quad (2.5)$$

Динаміку лінійної дискретної у часі системи чи елемента системи можна описати різницеvim рівнянням у вигляді

$$\begin{aligned} A_m \nabla^m y[n] + A_{m-1} \nabla^{m-1} y[n] + A_{m-2} \nabla^{m-2} y[n] + \dots + A_0 y[n] = \\ = B_l \nabla^l x[n] + B_{l-1} \nabla^{l-1} x[n] + B_{l-2} \nabla^{l-2} x[n] + \dots + B_0 x[n] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Після застосування до обох частин рівняння (2.6)  $Z$ -зображення воно приймає вигляд

$$\begin{aligned} (A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + A_{m-2} z^{m-2} + \dots + A_0) Y[z] = \\ = (B_l z^l + B_{l-1} z^{l-1} + B_{l-2} z^{l-2} + \dots + B_0) X[z]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Відношення  $Z$ - зображення вихідної величини  $Y(z)$  до  $Z$ - зображення вхідної величини  $X(z)$  називають дискретною передаточною функцією системи (*discrete transfer operator*)

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.8)$$

Структурну схему системи автоматичного регулювання з цифровим обчислювальним пристроєм зображено на рис.2.5, Передавальна функція об'єкта  $W_o(s)$  враховує також динаміку регулюючого органу та вимірювального перетворювача.

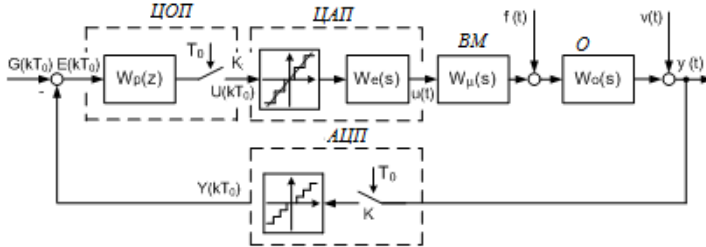


Рис.2.5. Структура цифрової автоматичної системи управління

Абстрагуючись від фізичної природи сигналів роботу аналого-цифрового перетворювача АЦП (*Analog Digital converter, ADC*) зводять до роботи ідеального імпульсного ключа, який періодично замикається для передачі інформації від об'єкта до обчислювального пристрою.

Цифровий обчислювальний пристрій ЦОП реалізує дискретний алгоритм управління

$$W_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.9)$$

Сигнал керування, вироблений в ЦОП періодично поступає на вхід цифро-аналогового перетворювача ЦАП (*Digital Analog converter, DAC*). ЦАП перетворює його у відповідний рівень аналогової вихідної напруги та утримує її незмінною до наступного моменту квантування. Через такий алгоритм роботи ЦАП називають екстраполятором нульового порядку, оскільки він прогнозує та реалізує керування на відрізку часу рівному періоду дискретизації. Динамічні властивості цифро-аналогового перетворювача описуються передаточною функцією

$$W_{ЦАП}(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \quad (10)$$

При аналізі цифрових систем АЦП приєднують до безперервної частини системи і враховуючи, що  $z = e^{T_0 s}$ , описують передаточною функцією:

$$W_{\text{ЦАП}}(s) = \frac{z-1}{zs} \quad (11)$$

Можливість реалізації безперервних алгоритмів в мікропроцесорними засобами автоматизації впливає із теореми Котельникова про неспотворене представлення аналогової інформації цифровим способом. Якщо період дискретизації  $T_0$  достатньо малий і задовольняє умовам теореми Котельникова то дискретні аналоги PID- регуляторів еквівалентні безперервним аналогам.

Умови теореми Котельникова виражаються співвідношеннями між частотою дискретизації  $\omega_0$ , верхньою частотою пропускання безперервної частини  $\omega_{\text{бн}}$  та максимальною частотою вхідного сигналу  $\omega_f$

$$\begin{aligned} \omega_0 &\geq 2\omega_{\text{бн max}} \\ \omega_f &\leq \omega_0 - \omega_{\text{бн max}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Звідси, період дискретизації повинен бути  $T_0 \leq \pi / \omega_{\text{бн max}}$ .

Вигляд дискретних аналогів неперервних ПІД-алгоритмів залежать від методу інтегрування. Найчастіше використовують найпростіші методи інтегрування:

- прямий метод Ейлера (*Forward Euler*)
- обернений метод Ейлера (*Backward Euler*)
- метод трапецій (*Trapezoidal method*)

Для І-регулятора при інтегруванні за прямим методом Ейлера розрахунок керування проводиться за формулами

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^{t^*} e(t) dt; \quad u(k) = \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i-1), \quad (2.13)$$

а при оберненому методі Ейлера для І-регулятора



$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^{t^*} e(t) dt; \quad u(k) = \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i) \quad (2.14)$$

і при інтегруванні методом трапецій

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^{t^*} e(t) dt; \quad u(k) = \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e(i) + e(i-1)}{2} \right] \quad (2.15)$$

Можливі дискретні аналоги неперервного ПІ-алгоритму при різних методах інтегрування

$$u(k)_{pi} = K_p \left( e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i-1) \right),$$

$$u(k)_{pi} = K_p \left( e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i) \right), \quad (1.16)$$

$$u(k)_{pi} = K_p \left( e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e(i) + e(i-1)}{2} \right] \right).$$

Аналогічно, дискретні аналоги неперервного ідеалізованого ПІД-алгоритму зі класичною структурою залежно від способу дискретизації інтегральної складової описуються рівняннями:

$$u(k)_{pid} = K_p \left( e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i-1) + \frac{T_d}{T_0} [e(k) - e(k-1)] \right)$$

$$u(k)_{pid} = K_p \left( e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{T_d}{T_0} [e(k) - e(k-1)] \right) \quad (2.17)$$

$$u(k)_{pid} = K_p \left( e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e(i) + e(i-1)}{2} \right] + \frac{T_d}{T_0} [e(k) - e(k-1)] \right)$$

Застосовуючи Z- перетворення до ідеалізованих дискретних алгоритмів регуляторів отримуємо їх дискретні передаточні функції при інтегруванні за прямим та оберненим методами Ейлера і методом трапецій:

$$\begin{aligned}
 W_{pid}(z) &= K_p \left( 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_0} (1 - z^{-1}) \right) \\
 W_{pid}(z) &= K_p \left( 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_0} (1 - z^{-1}) \right) \quad (2.18) \\
 W_{pid}(z) &= K_p \left( 1 + \frac{T_0}{2T_i} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_0} (1 - z^{-1}) \right)
 \end{aligned}$$

Наведені формули виражають позиційні алгоритми реалізації ПІД-регуляторів в дискретній (цифровій формі). Суть позиційного алгоритму полягає в тому, що на кожному кроці керування розраховується позиція в якій повинен знаходитися регулюючий орган. Для цього керуючий сигнал  $u[n]$  щоразу обчислюється заново, а всі попередні значення відхилення  $e(i)$  необхідно запам'ятовувати.

Існує також рекурентний швидкісний алгоритм ПІД-регулятора, більш придатний до реалізації в мікропроцесорних системах. Він характеризується тим, що для обчислення поточного значення сигналу керування  $u[n]$  використовується його попереднє значення  $u[n-1]$  і додаткова величина. При рекурентному методі на кожному кроці керування розраховується додаткове переміщення регулюючого органа від його попереднього положення.

Використовуючи метод прямокутників для апроксимації інтеграла, запишемо ПІД- закон керування у дискретному вигляді

$$u[n] = K_p (\varepsilon[n] + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon[i] + \frac{T_d}{T_0} (\varepsilon[n] - \varepsilon[n-1])). \quad (2.19)$$

Щоб встановити рекурентний алгоритм, знайдемо різницю значень керування для двох послідовних кроків керування:

$$\begin{aligned}
u[n] - u[n-1] &= K_p (\varepsilon[n] + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon[i] + \frac{T_d}{T_0} (\varepsilon[n] - \varepsilon[n-1]) - \\
&- K_p (\varepsilon[n-1] + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^{n-2} \varepsilon[i] + \frac{T_d}{T_0} (\varepsilon[n-1] - \varepsilon[n-2])) = \\
&= K_p \left( \left( 1 + \frac{T_d}{T_0} \right) \varepsilon[n] + \left( \frac{T_0}{T_i} - 1 - 2 \frac{T_d}{T_0} \right) \varepsilon[n-1] + \frac{T_d}{T_0} \varepsilon[n-2] \right)
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
k_0 &= K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T_0} \right); \\
k_1 &= K_p \left( \frac{T_0}{T_i} - 1 - 2 \frac{T_d}{T_0} \right); \\
k_2 &= K_p \frac{T_d}{T_0}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

У результаті, отримуємо швидкісний алгоритм ПІД-закону керування для програмної реалізації засобами обчислювальної техніки у вигляді

$$u[n] = u[n-1] + k_0 \varepsilon[n] + k_1 \varepsilon[n-1] + k_2 \varepsilon[n-2]. \tag{2.21}$$

Приклад підпрограми [] реалізації рекурентного ПІД-алгоритму в мікропроцесорних засобах наведено в додатку.

Рекурентний алгоритм PID-регулятора при інтегруванні за прямим методом Ейлера можна також представити у вигляді класичної структури.

$$u(k)_{pid} = u(k-1) + K_p \left( [e(k) - e(k-1)] + \frac{T_0}{T_i} e(k-1) + \frac{T_d}{T_0} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right)$$

Застосувавши z- зображення до різницевого рівняння цифрового ПІД- закону керування (2.21), отримаємо:

$$U(z) = \left( \frac{k_0}{1 - z^{-1}} + \frac{k_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \right) E(z). \tag{2.22}$$

У результаті, передаточна функція ПІД- регулятора у форматі цифрового фільтра має вигляд

$$W_{EOM}(z) = \frac{k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}. \tag{2.23}$$

Аналіз коефіцієнтів передаточної функції ЕОМ показує, що при  $k_2=0$  реалізується ПІ- регулятор, а при  $k_2=0$  і  $k_0=k_I$  отримуємо П - регулятор.

Дискретизація неперервних алгоритмів регулювання, заданих в операторній формі, може бути здійснена також при застосуванні  $Z$  - перетворення до  $S$  -передавальної функції. Формули такого переходу залежать від методу інтегрування: прямий метод Ейлера

$$s \rightarrow s^* = \frac{1}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{1}{T_0} (z-1), \quad (2.24)$$

обернений метод Ейлера

$$s \rightarrow s^* = \frac{1}{T_0} (1-z^{-1}) = \frac{1}{T_0} \frac{z-1}{z}, \quad (2.25)$$

метод трапецій, (формула Тастіна)

$$s \rightarrow s^* = \frac{2}{T_0} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}. \quad (2.26)$$

Передавальна функція цифрового реального ПІД-алгоритму при інтегруванні за прямим методом Ейлера

$$W_{pid}(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{T_d}{T_F} (1-z^{-1})}{1 - \frac{T_F - T_0}{T_F} z^{-1}} \right)$$

Передавальна функція цифрового реального ПІД-алгоритму при інтегруванні за оберненим методом Ейлера.

$$W_{pid}(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{T_d}{T_F + T_0} (1-z^{-1})}{1 - \frac{T_F}{T_F + T_0} z^{-1}} \right)$$

Передавальна функція цифрового реального ПІД-алгоритму при інтегруванні за методом трапецій.

$$W_{pid}(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{2T_d}{2T_F + T_0} (1-z^{-1})}{1 - \frac{2T_F - T_0}{2T_F + T_0} z^{-1}} \right)$$

### Контрольні запитання

1. Як поділяються ПІД-регулятори за структурою?
2. Яка різниця між ідеальним і реальним алгоритмами ПІД-регулятора?
3. Які умови реалізації безперервних регуляторів дискретними алгоритмами?
4. Які методи інтегрування використовують при реалізації ПІД-регуляторів цифровим способом?
5. У чому полягає різниця між позиційним і швидкісним рекурентним алгоритмом ПІД-регулятора?
6. Який математичний апарат застосовують для аналізу систем з цифровими регуляторами?

### Приклад 2.1.

Для безперервного ПІД-регулятора з параметрами  $K_p=1.9$ ,  $T_i=48$  с,  $T_d=8$  с-1 знайти передаточну функцію для цифрової реалізації алгоритму швидкісним рекурентним методом при періоді дискретизації  $T_0=1$  с.

Рішення.

Знаходимо передаточну функцію дискретного ПІД-регулятора у форматі цифрового фільтра

$$W_{PID}(z) = \frac{k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}.$$

При використанні прямого методу інтегрування Ейлера коефіцієнти регулятора в цифровій формі знаходимо за формулами

$$k_0 = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T_0} \right) = 1.9 \left( 1 + \frac{8}{1} \right) = 17.1$$

$$k_1 = K_p \left( \frac{T_0}{T_i} - 1 - 2 \frac{T_d}{T_0} \right) = 1.9 \left( \frac{1}{48} - 1 - 2 \frac{8}{1} \right) = -32.26$$

$$k_2 = K_p \frac{T_d}{T_0} = 1.9 \frac{8}{1} = 15.2$$

Отже, швидкісний алгоритм ПІД-закону керування для програмної реалізації засобами обчислювальної техніки отримуємо у вигляді

$$W_{PID}(z) = \frac{17.1 - 32.26z^{-1} + 15.2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Отже різницеве рівняння буде зручне для програмної реалізації в мікропроцесорній системі

$$u[n] = u[n-1] + 17.1\varepsilon[n] - 32.26\varepsilon[n-1] + 15.2\varepsilon[n-2]$$

## Приклад 2.2.

Для безперервного ПІ-регулятора з паралельною структурою знайти передаточну функцію у формі цифрового фільтра та алгоритм цифрової реалізації швидкісним рекурентним способом.

Рішення

Передаточна функція безперервного ПІ-регулятора

$$W_p(s) = K_p + K_i \frac{1}{s}$$

Для інтегрування використовуємо обернений метод Ейлера для якого

$$s^* = \frac{1}{T_0} \frac{z-1}{z}$$

Після підстановки

$$W_p(z) = K_p + K_i \frac{T_0 z}{z-1} = \frac{K_p(z-1) + K_i T_0 z}{z-1} = \frac{-K_p + (K_p + K_i T_0)z}{z-1}$$

Розділимо чисельник і знаменник дробу на  $z$

$$W_p(z) = \frac{-K_p + (K_p + K_i T_0)z}{z-1} = \frac{(K_p + K_i T_0) - K_p z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Отже передаточна функція ПІ-регулятора у формі цифрового фільтра

$$W_p(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

де  $a_0 = (K_p + K_i T_0)$ ,  $a_1 = -K_p$ .

На основі передаточної функції ПІ-регулятора різницеве рівняння приймає вигляд

$$u[n] = u[n-1] + a_0 \varepsilon[n] + a_1 \varepsilon[n-1]$$

**Завдання для самостійного вирішення**

1. Знайти передаточну функцію ПІ-регулятора у формі цифрового фільтра та алгоритм цифрової реалізації швидкісним рекурентним способом при інтегруванні за прямим методом Ейлера.
2. Знайти передаточну функцію ПІ-регулятора у формі цифрового фільтра та алгоритм цифрової реалізації швидкісним рекурентним способом при інтегруванні за методом трапецій.
3. Скласти блок-схему програмної реалізації ПІД-регулятора.

## **2. ІНЖЕНЕРНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ПІД-РЕГУЛЯТОРІВ**

При розробці систем керування промисловими об'єктами, що будуються на основі типових алгоритмів актуальною для практики є задача знаходження оптимальних параметрів регуляторів, що забезпечують бажаний тип перехідного процесу для заданого об'єкта регулювання [1,2]. Оптимізовані промислові АСР повинні відповідати таким основним вимогам:

- Система повинна забезпечувати якість регулювання у перехідних процесах і в усталеному стані відповідно до вимог технологічного процесу.
- Система повинна мати запас стійкості, достатній для компенсації неточності визначення динамічної характеристики об'єкта та її змін в процесі експлуатації.

Вказані вимоги є суперечливими. На практиці, вибираючи між запасом стійкості та якістю регулювання, як правило, віддають перевагу першому, застосовуючи так звані “ослаблені” або “слабкі” параметри настроювання регулятора (робастність).

### **2.1. Експериментальний метод параметричного синтезу АСР**

Експериментальний (формульний) метод ґрунтується на використанні параметрів кривої розгону ОР визначених експериментально.

Класично експеримент проводиться таким чином, що здійснюється ступінчаста зміна положення регулюючого органу на 15...20% ХРО (ходу регулюючого органу). В ході експерименту фіксуються значення регульованої величини через певні інтервали часу. В результаті отримують криву розгону об'єкта (рис.2.1). На етапі пуско-налагоджувальних робіт в експерименті можуть використовуватися змонтовані технічні засоби такі як, ручний задавач, контрольно-вимірювальні прилади чи SCADA-система.



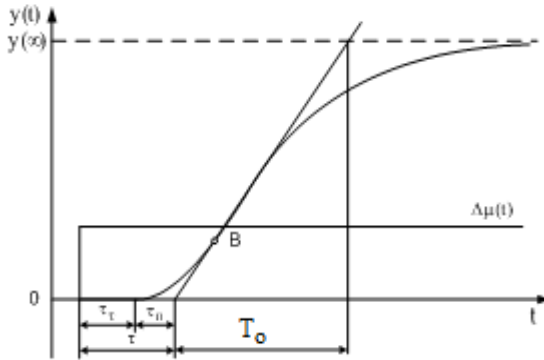


Рис. 2.1. Крива розгону об'єкта управління

Об'єкт ідентифікується диференціальним рівнянням першого порядку і має час постійного запізнення  $\tau$ , сталу часу  $T_o$  та коефіцієнт передачі по досліджуваному каналу  $K_o$ . Передаточна функція об'єкта приймається у вигляді аперіодичної ланки першого порядку з запізненням (*FOPDT - first order plus delay time model*)

$$W_o(s) = \frac{K_o}{T_o s + 1} e^{-\tau s} \quad (2.1)$$

В точці перегину *B* (рис.2.1) ставиться дотична, далі з графіка визначаються стала часу  $T_o$  та час запізнення  $\tau$ . Коефіцієнт передачі об'єкта знаходять за формулою

$$K_o = \frac{\Delta y}{\Delta \mu} \quad (2.2)$$

Коефіцієнт передачі  $K_o$  має розмірність *т.о.в у/%РО*, де через *т.о.в* у позначено технологічні одиниці вимірювання вихідної величини.

Співвідношення запізнення і постійної часу служить для вибору типу регулятора:

- позиційний регулятор при  $\frac{\tau}{T_o} < 0.2$ ;
- неперервний закон регулювання при  $0.2 \leq \frac{\tau}{T_o} \leq 0.8$ ;

- імпульсне або багатоконтурне регулювання при  $\frac{\tau}{T_o} \geq 0.8$

За визначеними із кривої розгону параметрами об'єкта оптимальні настроювання регуляторів знаходять за формулами наведеними в таб.2.1, які забезпечують перехідний процес з мінімальним часом регулювання:

Таблиця 2.1.

Оптимальні настроювання регуляторів за методом А.П.Копеловича

Регулятор	Оптимальне настроювання		
	$K_{p,onn}$	$T_{i,onn}$	$T_{d,onn}$
П	$\frac{0.3T_o}{K_o\tau}$	—	—
ПІ	$\frac{0.6T_o}{K_o\tau}$	$0,6T_o$	—
ПІД	$\frac{0.95T_o}{K_o\tau}$	$2,4\tau$	$0,4\tau$

### Контрольні запитання.

1. Які вимоги ставляться до якості роботи промислових АСР?
2. Якими передаточними функціями ідентифікують об'єкт при експериментальному методі оптимізації?
3. Які умови проведення експерименту на об'єкті управління?
4. Які недоліки і переваги експериментального методу оптимізації АСР?
5. Які критерії вибору закону регулювання АСР?

**Приклад 2.1.** Експериментальним методом знайти оптимальні настроювання ПІД-ІМ регулятора, якщо постійна часу виконавчого механізму постійної швидкості  $T_m = 2$  с. Результати експериментальних досліджень теплообмінника як об'єкта управління при 20% переміщенні регулюючого органа наведено в табл.2.2

Таблиця.2. 2

Експериментальні дані

$t, c$	0	10	15	20	25	30	35	40
$T, ^\circ C$	20	20	20,5	21	23	24,4	26,3	27,9

$t, c$	50	60	70	90	120	140
$T, ^\circ C$	30,6	32,6	34,3	36,5	38,4	39,0

Рішення

На рис.2.2. наведено експериментальну криву розгону об'єкта із якого видно, що об'єкт може бути ідентифіковано аперіодичною ланкою із запізненням.

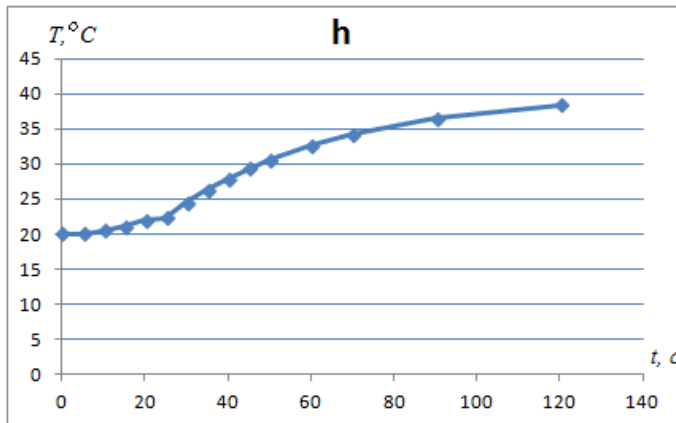


Рис..2.2. Крива розгону об'єкта управління

Передаточна функція еквівалентного об'єкта за каналом керування має вигляд

$$W_{eo}(s) = \frac{K_o}{T_o s + 1} e^{-\tau s}$$

Коефіцієнт передачі об'єкта знаходимо за формулою

$$K_o = \frac{\Delta T}{\Delta U} = \frac{20}{20} = 1 \frac{^\circ C}{\% PO}$$

де  $\Delta U$  - переміщення регулюючого органа (РО) .

Для визначення постійної часу об'єкта  $T_o$  і постійного запізнення  $\tau$  (транспортного та перехідного) перерахуємо криву розгону у перехідну характеристику і здійснимо додаткові побудови, як це показано на рис. 2.3

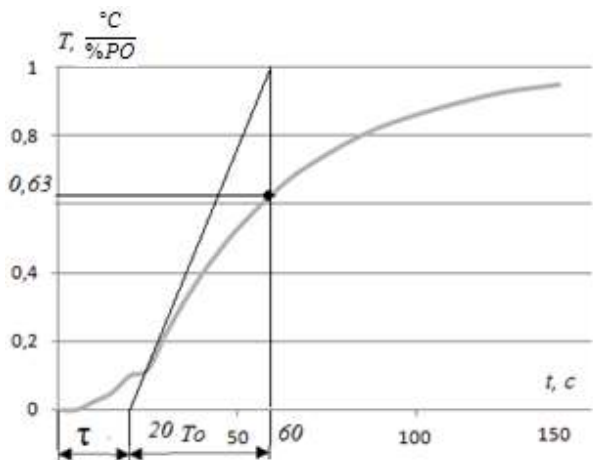


Рис.2.3. Перехідна характеристика об'єкта

З рис.2.3 знаходимо, що постійна часу еквівалентного  $T_o=40$  с та постійне запізнення  $\tau=20$  с, отже передаточна функція ідентифікованого об'єкта

$$W_o(s) = \frac{1}{40s + 1} e^{-20s}$$

За формулами наведеними в табл.2 на основі визначених параметрів об'єкта знаходимо значення оптимальних налаштувань ПД регулятора:

Коефіцієнт передачі регулятора

$$K_{ponm} = \frac{0.95T_o}{K_o\tau} = \frac{0.95 \cdot 40}{1 \cdot 20} = 1.9.$$

Постійна часу інтегруючої складової регулятора (час ізодрома)

$$T_{ionm} = 2.4\tau = 2,4 \cdot 20 = 48.$$

Коефіцієнт передачі при диференціюючій складовій ( час випередження)

$$T_{donm} = 0.4\tau = 0,4 \cdot 20 = 8.$$

Перерахуємо параметри регулятора із класичної структури в паралельну за формулами

$$K_{ponm} = 1.9$$

$$K_{ionm} = \frac{K_{ponm}}{T_{ionm}} = \frac{1.9}{48} = 0,04$$

$$K_{donm} = K_{ponm} T_{donm} = 1.9 \cdot 8 = 15.2$$

Складемо Simulink модель замкнутої системи (рис.2.3)

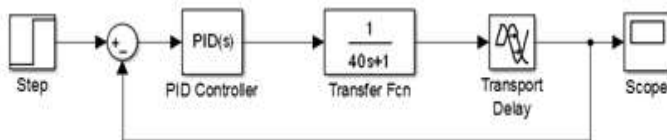


Рис.2.3. Схема моделювання замкнутої системи (рис.2.4)

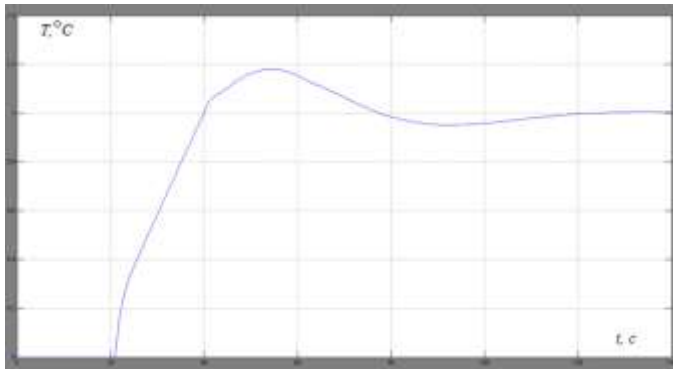


Рис.2.4. Перехідна характеристика розрахованої системи.

З перехідної характеристики знаходимо параметри якості регулювання:

Перерегулювання  $\sigma=19\%$ .

Час регулювання  $t_p=85$  с.

Усталена помилка  $\delta = 0$ .

## 2.2.Метод незгасаючих коливань Циглера – Нікольса (Ziegler -Nichols)

При відомій передаточній функції еквівалентного об'єкта  $W_{eo}(s)$  оптимальні настроювання регулятора можна знайти методом незгасаючих коливань. За критерієм стійкості Найквіста автоматична система регулювання розміщується на межі стійкості, тобто має коливання вихідної величини з постійними амплітудою і частотою, якщо характеристичне рівняння такої системи дорівнює нулю. Отже, для одноконтурної АСР умова виникнення автоколивань

$$1 + W_{pez}(s)W_{eo}(s) = 0 \quad (2.3)$$

В частотному домені рівняння (2.3) набирає вигляду

$$W_{pez}(j\omega)W_{eo}(j\omega) = -1, \quad (2.4)$$

або в експоненціальній формі

$$A_{pez}(\omega)e^{j\varphi_{pez}(\omega)}A_{eo}(\omega)e^{j\varphi_{eo}(\omega)} = -1. \quad (2.5)$$

Комплексне рівняння виконується за умов, що

$$\begin{cases} A_{pez}(\omega_{кр})A_{eo}(\omega_{кр}) = 1 \\ \varphi_{pez}(\omega_{кр}) + \varphi_{eo}(\omega_{кр}) = \pi \end{cases} \quad (2.6)$$

На першому етапі розрахунку приймається спочатку, що регулятор ґрунтується на П-законі регулювання з частотною характеристикою

$$W_{pez}(j\omega) = A_{pez}(\omega)e^{j\varphi_{pez}(\omega)} = K_{pez} \quad (2.7)$$

Система рівнянь набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} K_{кр} = \frac{1}{A_{eo}(\omega_{кр})} \\ \varphi_{eo}(\omega_{кр}) = \pi \end{cases} \quad (2.8)$$

Із другого рівняння знаходять критичну частоту коливань  $\omega_{кр}$ . Підставивши цю частоту у перше рівняння системи (2.8) отримують критичний коефіцієнт підсилення регулятора  $K_{кр}$ .

Далі на другому етапі за знайденими критичними параметрами  $K_{кр}$  і  $\omega_{кр}$  розраховують оптимальні значення параметрів регулятора за формулами, наведеними в табл.2.3.

Таблиця.2.3

## Оптимальні настроювання регуляторів

Регулятор	Оптимальне настроювання		
	$K_{p,ont}$	$K_{i,ont}$	$K_{d,ont}$
П	$0,5K_{кр}$	—	—
ПІ	$0,45K_{кр}$	$0,986K_{кр}\omega_{кр}$	—
ПІД	$0,6K_{кр}$	$0,192K_{кр}\omega_{кр}$	$0,47\frac{K_{кр}}{\omega_{кр}}$

Розраховані за табл.2.3 настроювання регулятора забезпечують ступінь загасання  $\psi = 0.75...0.9$  та перерегулювання не більше 20% .

**Контрольні запитання**

1. На якому критерії стійкості ґрунтується метод незгасаючих коливань?
2. Для якого типу регулятора знаходять критичні параметри в методі незгасаючих коливань?
3. Як за критичними параметрами знаходять оптимальні настроювання регуляторів в методі незгасаючих коливань?
4. Які переваги і недоліки оптимізації АСР за методом незгасаючих коливань?

Які критерії оптимальності забезпечуються методом незгасаючих коливань?

**Приклад.2.2.** Знайти оптимальні значення параметрів ПІД-регулятора методом незгасаючих коливань (Циглера-Нікольса), якщо передаточна функція еквівалентного об'єкта за каналом керування має вигляд

$$W_{eo}(s) = \frac{1}{25s+1} e^{-10s}.$$

Розв'язання

На основі передаточної функції об'єкта знаходимо його комплексну частотну характеристику підстановкою  $s = j\omega$

$$W_{eo}(\omega) = \frac{1}{25j\omega + 1} e^{-10j\omega}$$

З комплексної частотної характеристики знаходимо вираз для амплітудно- частотної характеристики

$$A_{eo}(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_o^2 \omega^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{25^2 \omega^2 + 1}}$$

Вираз для розрахунку амплітудно- частотної характеристики

$$\varphi_{eo}(\omega) = -(\arctg T\omega + \tau\omega) = -(\arctg 25\omega + 10\omega)$$

На першому етапі приймаємо, що регулятор реалізує пропорційний закон регулювання, тобто є П-регулятором. На основі критерію стійкості Найквіста, умови знаходження системи регулювання на межі стійкості і виникнення незгасаючих коливань приймають вигляд

$$\begin{cases} K_{кр} A_{eo}(\omega_{кр}) = K_{кр} \frac{1}{\sqrt{25^2 \omega_{кр}^2 + 1}} = 1 \\ \varphi(\omega_{кр}) = -(\arctg 25\omega_{кр} + 10\omega_{кр}) = -\pi \end{cases}$$

З другого рівняння системи рівнянь методом послідовних наближень знаходимо значення критичної частоти  $\omega_{кр}$ .

Результати розрахунків засобами Excel подано в табл.2.5

Таблиця 2.5.

$\omega, c^{-1}$	0	0,01	0,17	0,175	0,177	0,18	0,182
$\varphi(\omega), град$	0	19,7	174,25	177,48	178,77	180,69	181,98

З таблиці видно, що критичне значення частоти складає  $\omega_{кр} = 0.18 c^{-1}$  при  $\varphi(\omega) = 180 град$ .

Використовуючи критичне значення частоти з першого рівняння системи знаходимо критичне значення коефіцієнта передачі П-регулятора



$$K_{кр} = \frac{1}{\sqrt{25^2 0,18^2 + 1}} = 4,6$$

На другому етапі за отриманими критичними значеннями знаходимо оптимальні параметри настроювання ПД-регулятора за табличними формулами:

Коефіцієнт передачі пропорційної складової регулятора

$$K_{pонт} = 0,6K_{кр} = 0,6 \cdot 4,6 = 2,776.$$

Коефіцієнт передачі інтегруючої складової регулятора

$$K_{iонт} = 0,192K_{кр}\omega_{кр} = 0,6 \cdot 4,6 \cdot 0,18 = 2,074 = 0,085$$

Коефіцієнт передачі диференціюючої складової регулятора

$$K_{dонт} = \frac{0,471K_{кр}}{\omega_{кр}} = \frac{0,471 \cdot 4,6}{0,18} = 12,06.$$

Знайдені значення параметрів ПД-регулятора повинні забезпечувати в замкнутій системі перерегулювання не більше 20 %. Для перевірки правильності розрахунків проведемо моделювання системи автоматичного регулювання в MatLab Simylink

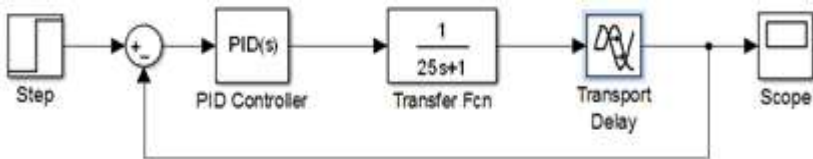


Рис.2.6. Simylink модель розрахованої системи.

Результати моделювання наведено на ри.2.7.

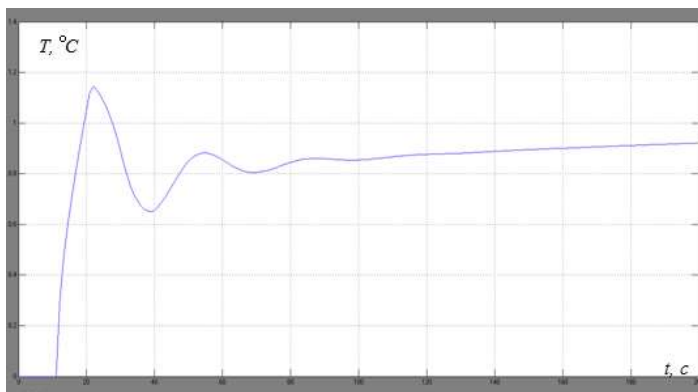


Рис.2. 7. Перехідна характеристика САР

З рис.2 знаходимо прямі показники якості регулювання:  
 перерегулювання  $\sigma = 17\%$  , час регулювання  $t_{рег} = 140\text{ с}$ ,  
 усталена похибка прямує до нуля  $\delta = 0$  .

#### Завдання на самостійне опрацювання.

Для об'єкта з передаточною функцією  $W_{eo}(s) = \frac{1}{25s+1} e^{-10s}$  :

1. Знайти оптимальні налаштування П-регулятора.
2. Провести комп'ютерне моделювання і визначити якість регулювання системи з П-регулятором.
3. Знайти оптимальні налаштування ПІ-регулятора.
4. Провести комп'ютерне моделювання і визначити якість регулювання системи з ПІ-регулятором.
5. Провести порівняльний аналіз якості регулювання при різних типах регуляторів

### 3. СИНТЕЗ АСР З ТИПОВИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Задача синтезу АСР може бути сформульована так: задана структура системи керування і за заданими показниками якості необхідно визначити параметри її елементів.

У загальному випадку при застосуванні методів синтезу для знаходження параметрів ПД-регулятора [3,4,5] спочатку вибирається критерій оптимальності, яким може бути один із показників якості або комплексний критерій, що складається з декількох показників з різними ваговими коефіцієнтами. До критерію додаються обмеження, що накладаються вимогами запасів стійкості чи робастності, і таким чином формується критеріальна функція, що залежить від параметрів регулятора. Потім використовуються числові методи мінімізації критеріальної функції з заданими обмеженнями, в результаті чого й визначають параметри регулятора, які задовольняють поставленим вимогам.

Методи параметричного синтезу розповсюджуються і на ПД-ІМ (імпульсні) та ПД-ШІМ (широтно-імпульсні) регулятори.

#### 3.1. Метод розширених комплексних частотних характеристик

Метод розширених комплексних частотних характеристик відзначається універсальністю та забезпечує необхідний запас стійкості системи. Найпростіше запас стійкості системи визначають на основі аналізу перехідного процесу в системі за допомогою коефіцієнта згасання коливань (рис.3.1).

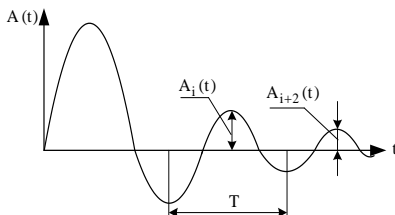


Рис.3.1. До визначення коефіцієнта згасання коливань

Цей коефіцієнт визначається відношенням різниці амплітуд одного знаку взятих через період до першої з них

$$\psi = \frac{A_i - A_{i+2}}{A_i} \quad (3.1)$$

Як показник запасу стійкості, застосовується також кореневий показник коливальності  $m$ , що визначається для найбільш слабо згасаючої компоненти загального перехідного процесу системи

$$m = \left| \frac{\alpha_k}{\omega_k} \right| = \left| \frac{\operatorname{Re}(s_k)}{\operatorname{Im}(s_k)} \right| \quad (3.2)$$

де  $\operatorname{Re}(s_k)$ ,  $\operatorname{Im}(s_k)$  - відповідно дійсна та уявна частини пари комплексно-спряжених домінуючих коренів  $s_k$ .

При цьому припускається, що для оцінки поведінки системи цілком достатньо пари комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння, найближчих до уявної вісі (рис.3.2)

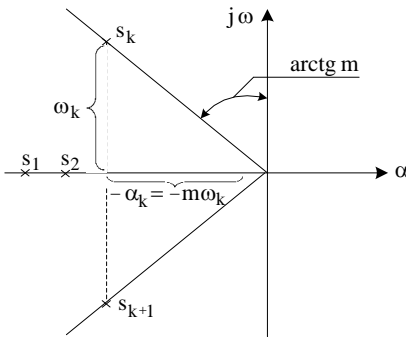


Рис.3.2. До визначення показника коливальності  $m$

Існує однозначна залежність між вказаними параметрами:  $\Psi = 1 - e^{-2\pi m}$ .

$\psi$	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500
$m$	0.2206	0.2562	0.3019	0.3665	0.4768

Розширені частотні характеристики регулятора і еквівалентного об'єкта отримуються із передаточних функцій шляхом підстановки

$$s = -m\omega + j\omega \quad (3.3)$$

Метод розширених частотних характеристик ґрунтується на такому самому принципі, як і метод незгасаючих коливань, з тією різницею, що умова (2.4) виконується при заданому ступені коливальності  $m$ , тобто

$$W_o(m, j\omega)W_p(m, j\omega) = -1, \quad (3.4)$$

де  $W_o(m, j\omega)$ ,  $W_p(m, j\omega)$  – розширені комплексні частотні характеристики (КЧХ) об'єкта і регулятора відповідно.

Звідси вираз для передаточної функції регулятора

$$W_p(m, \omega) = -\frac{1}{W_o(m, j\omega)} = -W_o^*(m, j\omega). \quad (3.5)$$

Передаточну функцію  $W_o^*(m, j\omega)$  називають інверсною (оберненою) розширеною КЧХ об'єкта.

Застосування методу розширених частотних характеристик розглянемо на прикладі системи з ПІ – регулятором

$$W_p(s) = K_p + \frac{K_i}{T_i s}. \quad (3.6)$$

Запишемо частотні характеристики регулятора і об'єкта у комплексній алгебраїчній формі:

$$W_p(m, j\omega) = \operatorname{Re}_p(m, \omega) + j \operatorname{Im}_p(m, \omega)$$

$$W_o^*(m, j\omega) = \operatorname{Re}_o^*(m, \omega) + j \operatorname{Im}_o^*(m, \omega)$$

Для виконання умови (3.4) прирівнюємо дійсні та уявні частини КЧХ регулятора і об'єкта

$$\operatorname{Re}_p(m, \omega) = -\operatorname{Re}_o^*(m, \omega) \quad (3.7)$$

$$\operatorname{Im}_p(m, \omega) = -\operatorname{Im}_o^*(m, \omega) \quad (3.8)$$

Ліва частина рівнянь (3.7), (3.8) залежить від параметрів регулятора, які підлягають визначенню, а права частина – від частоти  $\omega$  і параметрів об'єкта, що вважаються відомими.

Дійсна та уявна частини розширеної КЧХ ПІ-регулятора визначаються за формулами:

$$\operatorname{Re}_p(m, \omega) = K_p - \frac{K_p m}{T_i \omega (m^2 + 1)} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{Im}_p(m, \omega) = \frac{K_p}{T_i \omega (m^2 + 1)} \quad (3.10)$$

Після підстановки (3.9), (3.10) у систему рівнянь (3.7), (3.8) і розв'язку її відносно параметрів регулятора отримуємо рівняння границі області заданого ступеня згасання коливань в параметричній формі:

$$K_p = m \operatorname{Im}_o^*(m, \omega) - \operatorname{Re}_o^*(m, \omega), \quad (3.11)$$

$$\frac{K_p}{T_i} = \omega (m^2 + 1) \operatorname{Im}_o^*(m, \omega), \quad (3.12)$$

де  $\operatorname{Re}_o^*(m, \omega)$ ,  $\operatorname{Im}_o^*(m, \omega)$  - дійсна та уявна частини інверсної (оберненої) розширеної КЧХ об'єкта.

Задаючись бажаним значенням  $m = \text{const}$  і змінюючи з певним кроком частоту  $\omega$  будують лінію заданого ступеня згасання коливань системи в площині параметрів настроювання регулятора за виразами (3.11) і (3.12) яка має характерний вигляд показаний на рис.3.3.

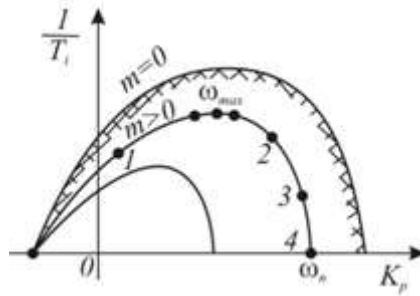


Рис. 3.3. Лінії рівного ступеня коливальності  $m$

Робочу частоту вибирають з умови:

$$\omega_p = 1.2 \omega_{\max}, \text{ або}$$

$$\omega_p = 0.8 \omega_n$$

**Контрольні запитання**

1. Яким показником оцінюють бажаний запас стійкості в методі розширених комплексних частотних характеристик?
2. Яка геометрична інтерпретація показника коливальності замкнутої системи регулювання  $m$ ?
3. Яким чином отримуються розширені комплексні частотні характеристики при синтезі АСР?
4. Яким способом знаходять рівняння границі області заданого ступеня згасання коливань?
5. Для чого служать побудови ліній рівного ступеня коливальності  $m$ ?

### Приклад 3.1.

Знайти вирази для розширених комплексних частотних характеристик ПІ- регулятора з паралельною структурою

#### Розв'язок

Передаточна функція регулятора

$$W_p(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Зробимо підстановку  $s = -m\omega + j\omega$

$$W_p(m, \omega) = K_p + \frac{K_i}{-m\omega + j\omega}$$

Позбудемось комплексності в знаменнику дробу

$$W_p(m, \omega) = K_p + \frac{K_i(-m\omega - j\omega)}{(-m\omega + j\omega)(-m\omega - j\omega)}$$

Звідси

$$W_p(m, \omega) = \left[ K_p - \frac{K_i m}{\omega(m^2 + 1)} \right] + j \frac{K_i}{\omega(m^2 + 1)}$$

### Приклад 3.2.

Знайти вирази для дійсної і уявної частин оберненої розширеної комплексної частотної характеристики об'єкта з передаточною функцією у вигляді аперіодичної ланки із запізненням.

Передаточна функція об'єкта

$$W_o(s) = \frac{K_o}{T_o s + 1} e^{-\tau s}$$

Інверсна передаточна функція об'єкта

$$W_o^*(s) = \frac{T_o s + 1}{K_o} e^{\tau s}$$

Підставимо

$$s = -m\omega + j\omega$$

Інверсна комплексна розширена частотна характеристика об'єкта

$$W_o^*(m, j\omega) = \frac{T_o(-m\omega + j\omega) + 1}{K_o} e^{\tau(-m\omega + j\omega)}$$

Після виконання перетворень отримуємо вираз для дійсної інверсної розширеної частотної характеристика об'єкта

$$R_{eo}^*(m, \omega) = \frac{-T_o m\omega + 1}{K_o} e^{-\tau m\omega} \cos \tau\omega - \frac{-T_o \omega}{K_o} e^{-\tau m\omega} \sin \tau\omega$$

та уявної інверсної розширеної частотної характеристика об'єкта

$$I_{mo}^*(m, \omega) = \frac{T_o m\omega - 1}{K_o} e^{-\tau m\omega} \sin \tau\omega - \frac{-T_o \omega}{K_o} e^{-\tau m\omega} \cos \tau\omega$$

### 3.2. Метод багатокритеріальної параметричної оптимізації

Особливо важливим для практичного використання є новий сучасний алгоритм багатокритеріальної параметричної оптимізації автоматичних систем регулювання [6,7]. Оптимізація систем за методом багатокритеріального оптимуму, базується на забезпеченні заданого розміщення домінуючих коренів характеристичного рівняння системи і поєднує принципи модального управління із методами розширених частотних характеристик і методу кратних коренів[8,9]. Цей метод дає змогу одночасно максимізувати швидкодію, ступінь стійкості, фільтруючі властивості системи забезпечити одночасний оптимум найважливіших характеристик системи в усталених та перехідних процесах.

В даному методі, як критерії швидкодії, розглядаються середньгеометричний полюс  $\Omega_0$  [100, 106-108]:

$$\Omega_0 \equiv \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n |s_k|} \equiv \sqrt[n]{a_0} \quad (3.13)$$

де  $a_0$  – вільний член характеристичного рівняння замкненої АСР, який зручно представити у вигляді:



$$\Delta(s) \equiv \sum_{k=0}^n a_k s^k \equiv \prod_{k=1}^n (s - s_k) = 0. \quad (3.14)$$

Необхідний запас стійкості визначається за ступенем стійкості  $\eta$

$$\eta \equiv \inf(-\beta_k) \geq \eta_0, \quad (3.15)$$

де  $\eta_0$ - допустиме значення;  $\beta_k$  - дійсна частина кореня характеристичного рівняння замкненої системи,  $\inf()$ -істотний інфімум (супремум істотних нижніх меж).

Фільтруючі властивості системи по відношенню до гармонічних складових спектру збурень оцінюються величиною АЧХ замкненої системи  $|\Phi(j\omega)|$  по каналу еквівалентного збурення, приведенного до виходу об'єкта.

Для систем з типовими регуляторами розміщення домінуючих коренів визначається з характеристичного рівняння

$$\Delta(s) = 1 + W_p(s)W_o(s) = 0, \quad (3.16)$$

де  $W_p(s)$ ,  $W_o(s)$ -передавальні функції регулятора та об'єкта.

Вимоги досягнення багатокритеріального оптимуму стосовно систем з ПД-регуляторами полягають у забезпеченні двох ідентичних пар комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння ( $n_0 = 4$ ), що мають вигляд [93]:

$$s_{1,2} = -m\omega \pm j\omega$$

$$s_{3,4} = -m\omega \pm j\omega$$

Для цього повинні виконуватися рівності:

$$\Delta(s) \Big|_{s=s_1} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d\Delta(s)}{ds} \Big|_{s=s_1} = 0 \quad (3.18)$$

Умови (3.17) і (3.18) виконуються, коли рівні нулю дійсні і уявні частини цих рівнянь. Таким чином отримуємо

систему з чотирьох рівнянь, які є нелінійними відносно параметрів настроювання.

$$\begin{cases} eq_1 := \operatorname{Re} [\Delta(s)]_{s=s_1} = 0 \\ eq_2 := \operatorname{Im} [\Delta(s)]_{s=s_1} = 0 \\ eq_3 := \operatorname{Re} \left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right]_{s=s_1} = 0 \\ eq_4 := \operatorname{Im} \left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right]_{s=s_1} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Наведена система рівнянь може бути розв'язана за допомогою числових методів. В результаті можна визначити параметри регулятора  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  і власну частоту АСР з неперервним ПД-регулятором. Отриманий таким чином розв'язок забезпечує також виконання умови

$$\left[ \left( \frac{K_p}{T_i} \right)_{\max} \right]_{\max},$$

тобто мінімізацію дисперсії регульованої величини при низькочастотних збурення.

Для систем з П - регуляторами умова багатокритеріального оптимуму полягає у забезпеченні за рахунок відповідного вибору параметрів їх настроювання трьох домінуючих коренів ( $n_0 = 3$ ) характеристичного рівняння замкненої АСР у вигляді:

$$s_{1,2} = -m\omega \pm j\omega$$

$$s_3 = -m\omega$$

Для цього повинні виконуватися рівності

$$\Delta(s) \Big|_{s=s_3} = 0 \quad (3.20)$$

$$\Delta(s) \Big|_{s=s_1} = 0 \quad (3.21)$$

Із виразів (3.20), (3.21) отримуємо систему рівнянь (3.22). За допомогою її числового розв'язку можна

визначити параметри настроювання  $K_p, T_i$  та власну частоту  $\omega$  АСР з ПІ-регулятором.

$$\begin{cases} eq_1 := \operatorname{Re} [\Delta(s)]_{s=s_1} = 0 \\ eq_2 := \operatorname{Im} [\Delta(s)]_{s=s_1} = 0 \\ eq_3 := [\Delta(s)]_{s=s_3} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

В АСР реалізуються процеси відпрацювання завдання і компенсації збурень, однак при збільшенні  $m$  динамічна точність відпрацювання завдання покращується, а компенсації збурення - погіршується. Тому для знаходження компромісного рішення пропонується критерій оптимальності у вигляді виразу, що враховує показники динамічної точності та стійкості системи

$$S = \delta J_g + \delta J_f + \delta m. \quad (3.23)$$

де  $\delta J_g = \frac{J_g / \tau}{(J_g / \tau)_{\max}}$   $\delta J_f = \frac{J_f / \tau}{(J_f / \tau)_{\max}}$  інтегральні оцінки якості каналів у відносних одиницях та нормовані до одиниці;

$\delta m_i = \frac{m_i}{(m_i)_{\max}}$  - показник коливності нормований до одиниці.

Оптимальне співвідношення “динамічна точність-стійкість” досягається в замкнутій системі, для якої

$$J = \frac{S}{(S)_{\max}} = \min \quad (3.24)$$

При цьому встановлено, що для розрахунку систем з об'єктами першого порядку необхідно приймати значення  $m = 0.3$ , а для об'єктів другого порядку -  $m = 0.5$ .

### Контрольні запитання

1. На яких принципах базується оптимізація систем за методом багатокритеріального оптимуму?
2. Які критерії оптимального співвідношення “динамічна точність-стійкість” в методі багатокритеріального

- оптимуму?
3. Які вимоги досягнення багатокритеріального оптимуму для систем з ПД-регуляторами?
  4. За яких умов досягається в замкнутій системі
  5. Як визначають параметри настроювання  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  і власну частоту АСР з ПД-регулятором в методи багатокритеріального оптимуму.

### Приклад 3.2.

Методом багатокритеріального оптимуму синтезувати систему регулювання з ПІ-регулятором для астатичного об'єкта із запізненням при:  $K_o=1$ ;  $\tau=10$ ;  $T=100$ ;  $m=0.5$ .

Рішення

Розрахунок неперервної АСР з ПІ- регулятором за методом багатокритеріальної параметричної оптимізації виконуємо в програмному середовищі *Maple*:

> restart;

Передавальні функції об'єкта і регулятора

>  $W_o := K_o \exp(-s \cdot \tau) / (T \cdot s + 1)$ ;  $W_r := K_p (1 + 1/(T_i \cdot s))$ ;

$$W_o := \frac{K_o e^{(-s \tau)}}{T s + 1}$$

$$W_r := K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Характеристичний квазіполіном

>  $ds1 := \text{numer}(1 + W_r \cdot W_o)$ ;

Система рівнянь багатокритеріального оптимуму

>  $s := -m \cdot \omega - \omega I$ ;

$$s := -m \omega - \omega I$$

>  $eq1 := \text{evalc}(\text{Re}(ds1)) = 0$ ;  $eq1 := \text{simplify}(eq1)$ ;

>  $eq2 := \text{evalc}(\text{Im}(ds1)) = 0$ ;  $eq2 := \text{simplify}(eq2)$ ;

>  $s := -m \cdot \omega$ ;

$$s := -m \omega$$

>  $eq3 := ds1 = 0$ ;  $eq3 := \text{simplify}(eq3)$ ;

Параметри об'єкта і регулятора

>  $K_o := 1$ ;  $\tau := 10$ ;  $T := 100$ ;  $m := 0.5$ ;  $\text{Digits} := 20$ ;

$K_o := 1$   
 $\tau := 10$   
 $T := 100$   
 $m := 0.5$

Числовий розв'язок системи рівнянь

```

> eq1:=evalf(eq1):eq2:=evalf(eq2):eq3:=evalf(eq3):
>
resPI:=fsolve({eq1,eq2,eq3},{Kp,Ti,omega},{Kp=1..10,Ti=1..200,omega=0.001..0.1});

    resPI := { Kp = 6.7892040573962241925, Ti = 33.123013057298916454,
               ω = 0.089912112528894952997 }
> assign(resPI);

```

Список використаних операторів:

simplify (-) - призначена для здійснення операції спрощення, виразів, який передається цій функції як параметр,  
evalc() - призначена для обчислення комплексних чисел,  
evalf() - призначена для обчислення виразів зі звичайними,  
s – список, множина, послідовність або рядок,  
numer(exp) – виділяє чисельник дробу,  
denom(exp) – виділяє знаменник дробу,

### Завдання для самостійного вирішення

За умовою і рішенням **прикладу 3.2** виконати:

1. Побудувати перехідну характеристику системи з оптимальними параметрами ПІ-регулятора.
2. За перехідною характеристикою визначити прямі показники якості регулювання.
3. Побудувати годограф розімкнутої системи і визначити запаси стійкості за амплітудою і фазою.
4. Знайти корені характеристичного рівняння і побудувати схему розташування коренів на комплексній площині .
5. Визначити степеневі критерії якості регулювання.

#### 4. ВИКОНАВЧІ ПРИСТРОЇ РЕГУЛЯТОРІВ

Реалізація керуючих дій в системах керування здійснюється за допомогою виконавчих пристроїв, до яких входять вихідні каскади регуляторів і контролерів, підсилювачі потужності, а також приводи та регулюючі органи (ВП - *Final Control Element*) регулятора.

Як прикінцевий, найбільш потужний елемент автоматичної системи управління, виконавчі пристрої суттєво впливають на статичні та динамічні властивості системи загалом. У виконавчому пристрої сигнали управління підсилюються за потужністю до рівня, достатнього для переміщення регулюючого органу. Разом з підсиленням в ньому відбувається перетворення керуючого сигналу в механічну дію (кутове чи лінійне переміщення, швидкість, прискорення). До виконавчих пристроїв ставляться технічні вимоги: високий рівень потужності для забезпечення необхідних значень переміщення, швидкості і прискорення регулюючого органу при зміні вхідного сигналу в робочому діапазоні частот; висока швидкодія; лінійність статичних характеристик; плавність регулювання швидкості переміщення в широкому діапазоні; малі маса, габарити і вартість; зручність в експлуатації та висока надійність.

Вид керуючих сигналів, які необхідні для виконавчого пристрою, визначає спосіб організації виходу для регулюючої змінної (неперервний чи дискретний), а й тип регулятора, який повинен використовуватися для керування процесом (регулятор неперервної дії чи регулятор з імпульсним виходом). Отже, вихідний сигнал регулятора повинен бути узгоджений з виконавчим пристроєм, тобто залежно від виду виконавчого пристрою і типу приводу необхідно застосовувати відповідний тип вихідного пристрою.

Вихідні пристрої аналогового типу - це цифроаналогові перетворювачі, які формують струмову петлю 4...20 мА, або напругу 0...10 В і, як правило, використовуються з напівпровідниковими регуляторами потужності.

Крім уніфікованих вихідних сигналів струму і напруги в регуляторах і контролерах для керування (вмикання/вимикання) навантаженням безпосередньо, або через більш потужні керуючі елементи застосовуються вихідні пристрої ключового типу, до яких належать: електромагнітні та твердотільні реле; транзисторні і симісторні оптопари.

Транзисторна оптопара застосовується, як правило, для керування низьковольтним або твердотільним реле (до 60 В постійного струму). Для запобігання виходу з ладу транзистора через великий струм самоіндукції паралельно обмотці реле необхідно вмикати діод.

Оптосимістор вмикається в коло керування потужного симістора через обмежуючий резистор, значення опору якого визначає струм керування симістором. Оптосимістор може також керувати парою зустрічно-паралельно увімкнених тиристорів.

Вихід для керування твердотільним реле реалізується за схемою транзисторного ключа n-p-n типу, який має два стани: низький логічний рівень, що відповідає напругам 0...1 В; високий рівень – напругам 4...6 В. Вихід “Т” використовується для підключення твердотільного реле, розрахованого на керування постійною напругою 4...6 В зі струмом керування не більшим 100 мА.

Кола ключових вихідних пристроїв мають гальванічну ізоляцію від схем регуляторів. Винятком є вихід “Т” для керування зовнішнім твердотільним реле, оскільки в цьому випадку гальванічну ізоляцію забезпечує саме реле.

#### **4.1. Виконавчі механізми**

Для вибору відповідної конфігурації регулятора важливе значення має тип приводу, який переміщує регулюючий орган і змінює подачу сировини чи енергії в об'єкт.

Термін привод (*Actuator*) означає комбінацію електродвигуна з керуючою електронікою. Проте, частіше сукупність приводу та системи керування називають виконавчим механізмом.

За видом енергії керуючого сигналу приводи поділяються на: електричні (електромоторні та

електромагнітні); пневматичні (мембранні та поршневі) і гідравлічні.

За динамічними властивостями виконавчі механізми, як елементи автоматичних систем регулювання, поділяються на механізми пропорційної та інтегральної дії.

При застосуванні ВМ пропорційної дії сигнал з регулятора перетворюється у пропорційне переміщення регулюючого органу, що призводить до пропорційного відкриття каналу, або зміни положення робочого органу. Таким чином, керуюча процесом змінна має бути аналоговим сигналом, що формується цифро-аналоговим перетворювачем.

Більшість виконавчих механізмів які використовуються в системах керування є пропорційними, наприклад, електроприводи постійного струму, синхронні та асинхронні двигуни змінного струму з частотним регулюванням. Виконавчими пристроями пропорційної дії є також напівпровідникові регулятори потужності з керування за допомогою фазо-імпульсних чи широтно-імпульсних сигналів та виконавчі механізми обладнані вбудованими мікропроцесорними системами.

Виконавчі механізми пропорційного типу можуть бути реалізовані також на базі електромоторних імпульсних виконавчих механізмів (ІВМ) постійної швидкості при використанні позиціонерів у зворотному зв'язку.

Виконавчі механізми пропорційної дії, які здатні відслідковувати значення керуючого впливу з необхідною точністю і швидкістю, називаються сервомеханізмами, або сервоприводами.

#### **4.2. Виконавчі механізми з двигунами постійного струму**

Приводи постійного струму протягом багатьох десятиліть безроздільно панують в системах прецизійної промислової автоматики завдяки високим значенням динаміки управління і глибини регулювання швидкості (до 1:10 000), а також здатності утримання моменту при нульовій швидкості. Двигуни постійного струму найбільш повно забезпечують регулювання швидкості і моменту в широких межах та застосовуються в практиці автоматизації, як сервоприводи.



Сервоприводи використовуються для точного позиціонування керуючих елементів механічної системи (заслінки, засувки, кути повороту), робочі органи і заготовки в верстатах і інструментах.

На рис. 4.1. наведено схему виконавчого механізму з двигуном постійного струму із незалежним збудженням. В першій зоні управління вона складається із системи керування (щиротно-імпульсного модулятора), мостового інвертора і якорного кола двигуна. Система керування виробляє прямокутні імпульси керування силовими IGBT транзисторами. Ширина імпульсів пропорційна напрузі керування  $U_k$ . Імпульси керування поступають одночасно на затвори транзисторів у протилежних діагоналях моста. При цьому відкриваються транзистори VT1, VT4, або - VT2, VT3 для зміни напрямку обертання. В результаті широтно-імпульсної модуляції середнє значення напруги на якорі двигуна, а також швидкість обертання пропорційні напрузі керування. Миттєва швидкість якоря двигуна буде коливатися відносно середнього значення, яке при незмінних моменті навантаження і напруги живлення однозначно залежить від шпаруватості імпульсів  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\tau_i}{T_n}, \quad (4.1)$$

де  $\tau_i$  - ширина імпульсів,  $T_n$  - період модуляції

Середнє значення напруги інвертора

$$U_d = \gamma U_{жс} \quad (4.2)$$

Величина швидкості збільшується при зростанні шпаруватості керуючих імпульсів

$$\omega = \frac{\gamma U_{жс} - I_{я} R_{я}}{k \Phi_n} \quad (4.3)$$

Діоди захищають транзистори від оберненої напруги при виключенні транзисторів.

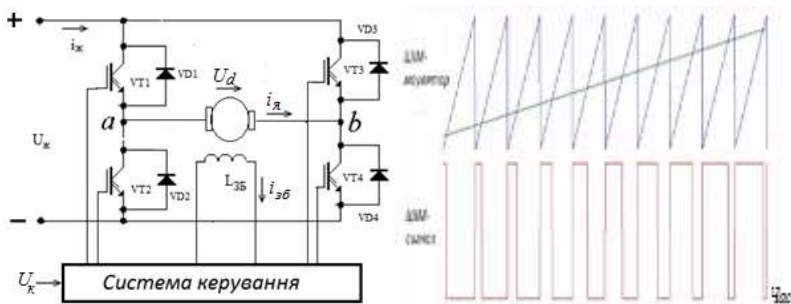


Рис.4.1. Керування двигуном постійного струму

Якщо вихідною величиною двигуна є швидкість обертання  $\omega$ , то його динамічні властивості описуються передавальною функцією аперіодичної ланки другого порядку

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)} = \frac{k}{(T_\mu s + 1)(T_e s + 1)} \quad (4.3)$$

де  $T_\mu$ ,  $T_e$  - електромеханічна та електромагнітна сталі часу відповідно.

Електромеханічна стала часу  $T_\mu$  має порівняно більше значення ( $0,05 \dots 0,2 \text{ c}$ ) і при  $T_e \ll T_\mu$  передавальна функція двигуна спрощується

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)} = \frac{k}{(T_\mu s + 1)} \quad (4.4)$$

Коли ж вихідною координатою двигуна є кут повороту  $\alpha$ , то він стає ланкою без самовирівнювання з передавальною функцією

$$W(s) = \frac{\alpha(s)}{U_u(s)} = \frac{k}{s(T_\mu s + 1)}$$

У другій зоні керування двигуном постійного струму здійснюється за допомогою зміни струму збудження  $I_{36}$ . Керування струмом збудження безпосередньо впливає на величину магнітного потоку і момент на валу двигуна. При зменшенні магнітного потоку швидкість обертання якоря збільшується.

### 4.3. Імпульсні виконавчі механізми

В автоматичних системах регулювання в якості виконавчих пристроїв широкого розповсюдження набули двофазні асинхронні двигуни змінного струму з короткозамкненим ротором. Такі двигуни мають на статорі обмотку управління і обмотку збудження, магнітні осі яких зсунуті в просторі на  $90^\circ$  (рис.4.2).

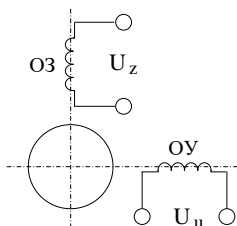


Рис.4.2. Двофазний асинхронний електродвигун змінного струму

При подачі на обмотки змінних напруг зсунутих по фазі на  $90^\circ$  в магнітній системі двигуна виникає обертове магнітне поле, яке спричинює обертання ротора в ту ж сторону, що й магнітне поле, але з меншою кутовою швидкістю.

Можливими способами управління швидкістю обертання є амплітудний, фазовий і амплітудно-фазовий. Наприклад, при амплітудно-фазовому способі управління швидкість обертання ротора двигуна регулюється за допомогою зміни напруги  $U_u$ . Динамічні характеристики двофазного асинхронного двигуна описуються такими ж виразами, як і для двигуна постійного струму. Для асинхронних виконавчих двигунів з короткозамкненим ротором потужністю 15...20 Вт при частоті живлення 400 Гц стала часу  $T_\mu$  лежить в межах 0,1...0,5 с.

Перевагами двигунів змінного струму є: економічність; простота конструкції та надійність; легкість обслуговування; відсутність комутатора, тощо. Недоліками двигунів змінного струму є нижчий, ніж у двигунів постійного струму пусковий момент і складніші схеми керування.

Для одержання зсуву фаз між напругами і струмами в коло обмотки збудження вмикається конденсатор ємністю  $C$ , при цьому двигун живиться від однієї фази.

На основі однофазних асинхронних конденсаторних двигунів з симетричними обмотками (або трифазних) асинхронних двигунів будуються виконавчі механізми постійної швидкості типу МЕО (механізм електричний однооборотний). Керування ними здійснюється за допомогою контактних чи безконтактних реверсивних пускових пристроїв із використанням 3-провідної лінії керування.

На рис. 4.3 показано принцип керування однофазним асинхронним конденсаторним двигуном змінного струму з симетричними обмотками за допомогою безконтактного керуючого пристрою. Керуючий пристрій містить два ключі  $K_1$ , і  $K_2$ , які керуються сигналами від регулятора в автоматичному режимі.

За відсутності керуючих сигналів ключі розімкнені і обмотки двигуна знеструмлені. При подачі керуючого сигналу “Менше” (М) замикається ключ  $K_1$  і до обмотки  $O_1$  під’єднується джерело живлення  $\sim 220$  В. До другої обмотки  $O_2$  напруга живлення подається через фазозсуваючий конденсатор С. Електродвигун обертається в напрямку “Менше”.

Для вмикання електродвигуна у протилежному напрямку необхідно розімкнути ключ  $K_1$  замкнути ключ  $K_2$  (Б). При цьому до джерела живлення обмотка  $O_2$  підключається безпосередньо, а обмотка  $O_1$  – через конденсатор. Фазовий зсув між обмотками змінює знак, в результаті чого відбувається реверс двигуна, тобто він буде обертатися в напрямку “Більше”.

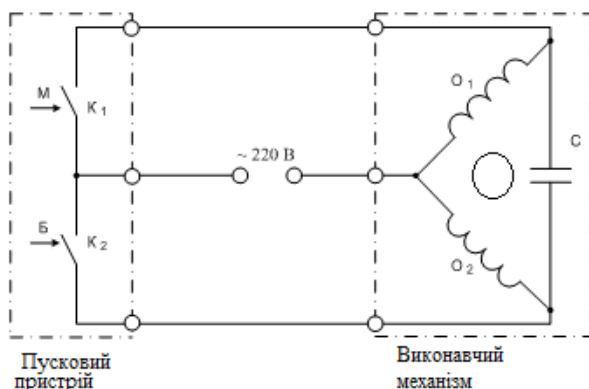


Рис. 4.3. Керування однофазним конденсаторним двигуном

Виконавчий механізм постійної швидкості може перебувати в одному із трьох усталених станів: обертання ротора з постійною швидкістю  $S$ , зупинка, обертання ротора з тією ж швидкістю у протилежну сторону.

Характеристика ВМ постійної швидкості суттєво нелінійна, як у трипозиційного реле з гістерезисом. Проте цей же виконавчий механізм може мати достатньо близькі до лінійних характеристики при керуванні ним за допомогою імпульсних сигналів. В цьому випадку його називають імпульсним виконавчим механізмом (ІВМ). Кожний ІВМ характеризується часом повного відкривання  $T_{мех}$ , який вказується у паспорті механізму.

Для керування ІВМ в мікропроцесорних системах служить ПІД-імпульсний регулятор (ПІД-ІМ), який складається з аналогового регулятора і імпульсного модулятора ІМ (рис.4.4).

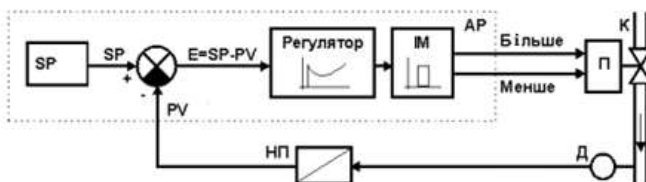


Рис. 4.4. Структурна схема АСР з PID\_ІМ регулятором.

Для ПІД-ІМ регулятора крім основних налаштовувальних параметрів необхідно задавати також постійну часу виконавчого механізму  $T_{мех}$ . Імпульсний модулятор масштабує величину керування вироблену регулятором до постійної часу механізму  $T_{мех}$ . При цьому тривалість імпульсів пропорційна величині керування  $U_k$  (від 0...100%) і часу повного відкривання регулюючого органу

$$\tau_i = U_k T_{мех}$$

У залежності від знаку відхилення  $E$  імпульс поступає на дискретний вихід каналу “більше” чи “менше”. PID-ІМ регулятор має і додаткові параметри настройки. Так, для запобігання багаторазового включення/виключення вводиться гістерезис (рис.4.5), який характеризується, мінімальною затримкою між включеннями і мінімальною тривалістю імпульса  $T_{min}$ , яку знаходять за формулою

$$T_{min} = \frac{\Delta PV_{min} T_{mex}}{KPV_{max}}$$

де  $\Delta PV_{min}$  - мінімальна зміна параметра, допустима по якості регулювання,  $T_{mex}$  - час механізму,  $PV_{max}$  - діапазон зміни вихідного сигналу,  $K$ - коефіцієнт передачі об'єкта.

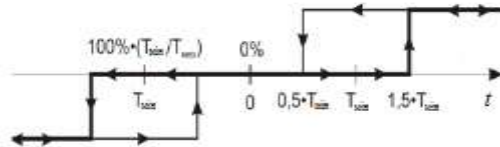


Рис. 4.5. Діаграма включення/виключення імпульсного регулятора

Такий спосіб керування виконавчим механізмом постійної швидкості надає йому інтегральних властивостей з передавальною функцією

$$W_{i\omega}(s) = \frac{S}{T_{\mu}s}$$

Мікропроцесорні ПД - імпульсні регулятори мають додатковий вхід для змінної слідкування за положенням виконавчого механізму. Відповідно, виконавчі механізми обладнуються позиціонерами (реостатними, індуктивними, струмовими), які формують сигнал, пропорційний куту повороту вихідного валу ВМ.

Якщо IBM разом з пусковим пристроєм охопити від'ємним жорстким зворотним зв'язком (рис. 4.6) за допомогою пропорційної ланки з коефіцієнтом передачі  $K_{zz}$ , то така схема буде реалізувати пропорційний алгоритм. При подачі на вхід сигналу  $|U_R| > \Delta_n / 2$  ВМ увімкнеться і буде переміщувати регулюючий орган з постійною швидкістю  $S$  в напрямку зменшення (компенсації) сигналу  $U_R$ . Переміщення  $\mu$  регулюючого органу (РО) передається у вигляді сигналу зворотного зв'язку  $\zeta$ , зменшуючи результуючий сигнал  $|\sigma| = U_R - \zeta$ , що діє на релейний елемент.

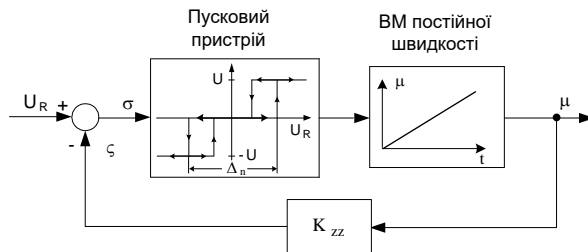


Рис. 4.6. Схема керування виконавчим механізмом постійної швидкості з зворотним зв'язком за положенням

Таким чином, ВМ постійної швидкості, увімкнений за схемою рис. 4.6 у динамічному відношенні стає пропорційною ланкою з коефіцієнтом передачі

$$K_{\mu} \cong 1 / K_{zz}.$$

Отже, електромоторні виконавчі механізми постійної швидкості як елементи систем регулювання можуть використовуватися у двох режимах – інтегральному та пропорційному.

До складу ВМ входять також: редуктор, гальмівний пристрій, блоки кінцевих вимикачів. Кінцеві вимикачі служать для обмеження граничних положень вихідного валу ВМ при дистанційному керуванні, тобто виконують захисні функції. Крім того, у ВМ передбачається ручний привід, який використовується при виході з ладу пускового пристрою.

Необхідно зауважити, що серійні електромоторні виконавчі механізми мають фіксовані значення швидкості обертання, так що час повного переміщення їх робочого органу становить 10, 20, 25, 63 або 160 секунд.

**Приклад 4.1.** Яке середнє значення напруги на навантаженні, якщо регулятор ПІД-ШІМ виробляє імпульси тривалістю 10 с з періодом слідування 1 хв при живленні навантаження напругою 220 В.

Рішення.

Знайдемо коефіцієнт відносної тривалості імпульсів (шпаруватість)

$$\gamma = \frac{\tau_i}{T_n} = \frac{10}{60} = 0.17$$

Середнє значення напруги керування

$$U_d = \gamma U_{\text{яс}} = 0.17 \cdot 220 = 37.4$$

**Приклад 4.2.** Для двигуна постійного струму з незалежним збудження з вказаними паспортними характеристиками:

Тип двигуна	2ПН-100М
Потужність, кВт	2,00
Напруга якоря, В	220
Напруга збудження, В	220
Сила струму якоря, А	11
Номінальна частота, об/хв	3000
Максимальна частота, об/хв	4000
ККД%	79,0
Потужність збудження, Вт	130
Опір якоря, Ом	0,805
Опір додаткових полюсів, Ом	0,57
Момент інерції якоря, кг/м <sup>2</sup>	0,0 11

Знайти швидкість обертання, якщо система керування з ШІМ виробляє імпульси тривалістю 10 с при періоді слідування вання 1 хв.

Рішення:

З регулювальної характеристика двигуна постійного струму з незалежним збудженням

$$\omega_n = \frac{U_n - I_{\text{я}} R_{\text{я}}}{k \Phi_n}$$

Знайдемо номінальний коефіцієнт електрорушійної сили (ЕРС) електродвигуна

$$k \Phi_n = \frac{U_n - I_{\text{я}} R_{\text{я}}}{\omega_n} = \frac{220 - 11 \cdot 0.805}{314} = 0.67 \text{ В с},$$

$$\text{де } \omega_n = \frac{\pi n_n}{30} = \frac{3.14 \cdot 3000}{30} = 314 \text{ с}^{-1}$$

Скважність модульованих імпульсів

$$\gamma = \frac{\tau_i}{T_n} = \frac{10}{60} = 0.17$$



Швидкість обертання двигуна

$$\omega = \frac{\gamma U_{ж} - I_{я} R_{я}}{k \Phi_n} = \frac{0.17 \cdot 220 - 11 \cdot 0.81}{0.67} = 42.52 \text{ c}^{-1}$$

$$\text{Або } n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 42.52}{3.14} = 406,24 \text{ об/хв.}$$

### Приклад 4.3.

Постійна часу імпульсного виконавчого механізму 63 с. Виконавчий механізм знаходиться в положенні "відкрито" 40%. Яке керування повинен виробити ПД-ІМ - регулятор, щоб спочатку відкрити регулюючий орган на 10%, а потім закрити його на 25%. Побудувати діаграму управління.

Рішення

Щоб відкрити регулюючий органу на 10% РО необхідно на дискретному виході "відкрити" сформувати імпульс тривалістю

$$M = \frac{T_{\mu} \Delta U_1 \%}{100\%} = \frac{63 \cdot 10}{100} = 6.3 \text{ с}$$

Аналогічно щоб прикрити регулюючий орган на 25% необхідно на дискретний вихід "закрити" подати імпульс тривалістю

$$M = \frac{T_{\mu} \Delta U_1 \%}{100\%} = \frac{63 \cdot 25}{100} = 15.75 \text{ с}$$

За даними розрахунку будуємо діаграму переміщення регулюючий органу



## 5. СИНТЕЗ СИСТЕМ МЕТОДОМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Синтез систем методом модального управління полягає у знаходженні управління яке забезпечує поставлені вимоги:

- до динамічних показників якості проектованої системи.
- до необхідної точності цієї системи.

Цей метод одержав широкий розвиток для задач синтезу автоматичних систем управління об'єктами із великим числом параметрів стану. Найбільш повно він розвинутий для випадків знаходження управління у вигляді статичного зворотного зв'язку при повному вимірюванні змінних стану по заданому розташуванню коренів характеристичного полінома [10,11].

### 5.1. Принципи модального управління

Лінійний об'єкт управління у просторі станів задається рівняннями руху:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_g g + B_f f \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.1)$$

де  $x$  -  $n$ - мірний вектор стану;  $y$  - одномірний вектор вихідних (регульованих) змінних;  $u$  -  $m$ - мірний вектор керуючих впливів;  $g$  -  $k$ - мірний вектор задаючих впливів;  $f$  -  $r$ - мірний вектор збурюючих впливів;  $A$  - матриця, яка визначає динамічні властивості об'єкта управління розмірності  $n \times n$ ;  $B$  - матриця керуючих впливів розмірності  $n \times m$ ;  $B_g$  - матриця задаючих впливів розмірності  $n \times k$ ;  $B_f$  - матриця збурюючих впливів розмірності  $n \times r$ ;  $C$  - матриця виходу розмірності  $l \times n$ ;  $n$  - порядок об'єкта управління.

Об'єкт управління може бути як об'єктом управління з повною інформацією, так і об'єктом управління з неповною інформацією. Для об'єкта управління з повною інформацією всі змінні вектора стану доступні для вимірювання. При цьому матриця керованості задається векторним рівнянням

$$U = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Відповідно до технічного завдання формується цільова функція  $J(t_n, \sigma_x, \sigma_y)$ , яка забезпечує досягнення заданих

показників якості. Далі, на підставі набору показників якості формується еталонна модель, яка визначає необхідну поведінку замкнутої САУ.

У загальному вигляді еталонна модель у просторі станів

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = G\zeta \\ v = H\zeta \end{cases} \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad (5.3)$$

де  $\zeta$  -  $n$ -мірний вектор змінних стану моделі;  $\zeta(0)$  -  $n$ -мірний вектор початкового стану моделі;  $G$ - матриця, яка визначає необхідні динамічні властивості САУ розмірності  $n \times n$ ;  $v$  -  $m$ -мірний вектор вихідних змінних моделі;  $H$ - матриця виходу моделі, розмірності  $m \times n$ ;

Матриця  $G$  формується на основі вибору бажаного виду перехідних процесів. Вигляд перехідних процесів в лінійних системах визначається розташуванням коренів характеристичного полінома  $\lambda_i$ ,  $i=1...n$  на комплексній площині коренів. Матриця  $H$  вибирається з умови, що еталонна модель має властивість повної спостережуваності.

Керування розробляється для двох каналів завдання і збурення, що відповідають режимам роботи САУ відповідно слідкування і стабілізації. Тому еталонні моделі будуються для двох випадків:

Для режиму слідкування модель задаючого впливу має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_g = G_g \zeta_g \\ v_g = H_g \zeta_g \end{cases} \quad \zeta_g(0) = \zeta_{g0} \quad (5.4)$$

і для збурюючої дії аналогічно

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_f = G_f \zeta_f \\ v_f = H_f \zeta_f \end{cases} \quad \zeta_f(0) = \zeta_{f0} \quad (5.5)$$

Віхилення повеінки САУ від моделі оцінюється вектором помилки  $e$  :  
для режиму стабілізації

$$\begin{cases} e = -x \\ e = Ce \end{cases} \quad (5.6)$$

для режиму слідкування

$$\begin{cases} e = M_g \zeta_g - x \\ e = Ce \end{cases}, \quad (5.7)$$

де  $e$  -  $l$ -мірний вектор вихідних змінних моделі помилки;  
 $M_g$  - матриця узгодження розмірностей векторів стану об'єкта управління і моделі задаючого впливу.

Диференціюючи за часом вирази (5.6.) і (5.7) отримуємо рівняння моделі помилки у вигляді:

- для режиму стабілізації:

$$\dot{e} = Ae - Bu - B_f f; \quad (5.8)$$

- для режиму слідкування:

$$\dot{e} = (M_g \Gamma_g - AM_g - B_g H_g) \zeta_g + Ae - Bu - B_f f. \quad (5.9)$$

Вирази відрізняються членом взятим у дужки. тому задачу слідкування можна звести до задачі стабілізації.

Метою будь-якого керуючого впливу є забезпечення нульового вектора помилок. Тим самим досягається необхідна поведінку САУ. Тому необхідно в рівняннях (1.8), (1.9) найти такі управління, які дозволять забезпечити необхідний режим функціонування і усунути вплив збурення. На основі рівнянь(1.8) і (1.9) будемо структурні схеми САУ.

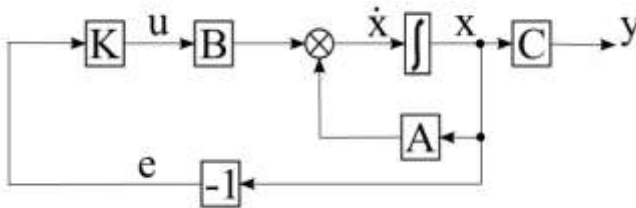


Рис.5.1 Структурна схема САУ в режимі стабілізації.

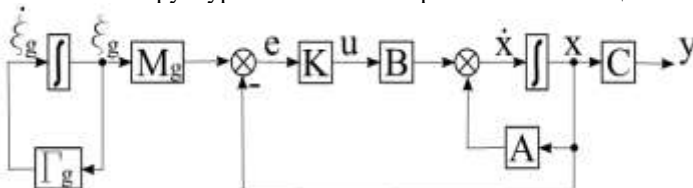


Рис.5.2. Структурна схема САУ в режимі слідкування.

Поставлену задачу синтезу дозволяє вирішувати метод модального управління. Цей метод заснований на забезпеченні системі необхідних мод. Мода - це частина вільної складової рішення диференціального рівняння  $x_i$ , що виражається через експоненту, корінь характеристичного полінома  $\lambda_i$  і час  $t$

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} \quad (5.10)$$

Для методу модального управління є характерним формування керуючих впливів у вигляді статичного регулятора.

Статичний регулятор - це регулятор, який описується лінійною функцією всіх змінних вигляду:

$$u = Ke, \quad (5.11)$$

де  $K$  – матриця коефіцієнтів від’ємних зворотних зв’язків по всіх змінних вектора помилки, розмірності  $m \times n$ . В розгорнутому виді матриця коефіцієнтів від’ємних зворотних зв’язків

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix};$$

де  $e$ - вектор помилок

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

В скалярному вигляді статичний регулятор описується системою рівнянь

$$\begin{cases} u_1 = -k_{11}e_1 - k_{12}e_2 - \dots - k_{1n}e_n \\ u_2 = -k_{21}e_1 - k_{22}e_2 - \dots - k_{2n}e_n \\ \vdots \\ u_m = -k_{m1}e_1 - k_{m2}e_2 - \dots - k_{mn}e_n \end{cases} \quad (5.12)$$

Якщо режимом функціонування САУ є режим стабілізації і на об'єкт управління не діють збурення, тобто в рівнянні (5.8)  $f = 0$ , то модель помилок набуває вигляду:

$$\square \quad e = Ae - Bu \quad (5.13)$$

Опис замкнутої системи з модальним регулятором отримуємо підстановкою рівняння (5.11) у вираз (5.13)

$$\square \quad e = Ae - BKe = (Ae - BK)e = Fe, \quad (5.14)$$

де  $F = A - BK$  – матриця опису замкнутої системи.

В результаті, рівняння руху замкнутої системи визначається системою векторних рівнянь:

$$\begin{cases} \square \\ e = Fe \\ y = -Ce \end{cases} \quad (5.15)$$

Як видно система рівнянь (5.15) схожа на систему рівнянь (5.4). Збіг коефіцієнтів характеристичних поліномів або коренів характеристичних поліномів матриці моделі  $G$  і матриці системи  $F$  призводить до того, що вектор стану замкнутої системи повністю повторює рух вектора стану еталонної моделі.

Таким чином корені матриць  $G$  і  $F$  зв'язані залежністю

$$\lambda_i^* = \omega_0 \lambda_i \quad (5.16)$$

де  $\omega_0$  - додатне число (частота системи);  $\lambda_i^*$  - корені характеристичного полінома моделі;  $\lambda_i$  - корені полінома системи.

Вільні складові руху моделі

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i^* t} \quad (5.17)$$

і системи

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}. \quad (5.18)$$

Порівнюючи рівняння (5.17) і (5.18) та враховуючи співвідношення (5.16), отримуємо вираз для вільної складової еталонної моделі у вигляді:

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i \omega_0 t} = x(\omega_0 t) \quad (5.19)$$

Рівняння (5.19) відображає принцип подібності, який полягає в тому, що збільшення параметра  $\omega_0$  призводить до збільшення швидкості протікання процесів в системі, але при цьому не впливає на коливальність перехідних процесів. Таким чином, швидкодія процесів, що протікають в еталонній моделі  $t_n^*$  і в замкнутій системі  $t_n$  пов'язані між собою:

$$t_n = t_n^* \omega_0. \quad (5.20)$$

Останнє співвідношення дає можливість формувати матриці еталонної моделі на основі методу стандартних поліномів і нормованих перехідних функцій. Для цього на основі бажаних показників якості визначається необхідний характеристичний поліном  $D^*(\lambda)$  або корені характеристичного полінома  $\lambda_i^*$ . Формування матриць еталонної моделі відбувається на основі стандартних поліномів Ньютона і Баттерворта.

Якщо перерегулювання не допускається ( $\sigma = 0$ ) то використовують стандартні поліноми Ньютона (табл.5.1.)

$$D^*(\lambda) = (\lambda + \omega_0)^n$$

Таблиця 5.1

$n$	Стандартний поліном Ньютона
1	$\lambda + \omega_0$
2	$\lambda^2 + 2\omega_0\lambda + \omega_0^2$
3	$\lambda^3 + 3\omega_0\lambda^2 + 3\omega_0^2\lambda + \omega_0^3$
4	$\lambda^4 + 4\omega_0\lambda^3 + 6\omega_0^2\lambda^2 + 4\omega_0^3\lambda + \omega_0^4$
5	$\lambda^5 + 5\omega_0\lambda^4 + 10\omega_0^2\lambda^3 + 10\omega_0^3\lambda^2 + 5\omega_0^4\lambda + \omega_0^5$
6	$\lambda^6 + 6\omega_0\lambda^5 + 15\omega_0^2\lambda^4 + 20\omega_0^3\lambda^3 + 15\omega_0^4\lambda^2 + 6\omega_0^5\lambda + \omega_0^6$

Ці поліноми мають дійсні кратні корені  $\lambda_i = -\omega_0$ . При  $\omega_0 = 1$  ці корені забезпечують нормовані аперіодичні перехідні характеристики моделі (рис.5.3)

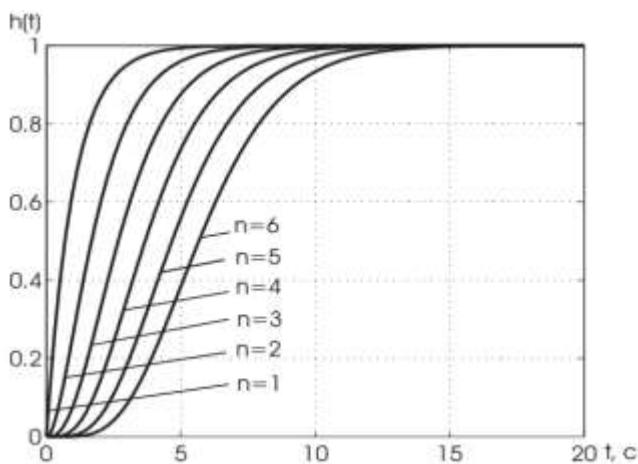


Рис.5.3.Нормовані перехідні характеристики моделі Ньютона

Стандартні поліноми Баттерворта

$$D^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*)$$

мають комплексні корені розташовані півколом з радіусом  $\omega_0 = 1$  (табл.5.2.)

Таблиця 5.2

n	Стандартний поліном Баттерворта
1	$\lambda + \omega_0$
2	$\lambda^2 + 1, 4\omega_0\lambda + \omega_0^2$
3	$\lambda^3 + 2\omega_0\lambda^2 + 2\omega_0^2\lambda + \omega_0^3$
4	$\lambda^4 + 2, 6\omega_0\lambda^3 + 3, 4\omega_0^2\lambda^2 + 2, 6\omega_0^3\lambda + \omega_0^4$
5	$\lambda^5 + 3, 24\omega_0\lambda^4 + 15, 24\omega_0^2\lambda^3 + 5, 24\omega_0^3\lambda^2 + 3, 24\omega_0^4\lambda + \omega_0^5$
6	$\lambda^6 + 3, 86\omega_0\lambda^5 + 7, 46\omega_0^2\lambda^4 + 9, 13\omega_0^3\lambda^3 + 7, 46\omega_0^4\lambda^2 + 3, 86\omega_0^5\lambda + \omega_0^6$



Модельні поліноми Баттерворта забезпечують системі перерегулювання  $\sigma \leq 20\%$  (рис.5.4)

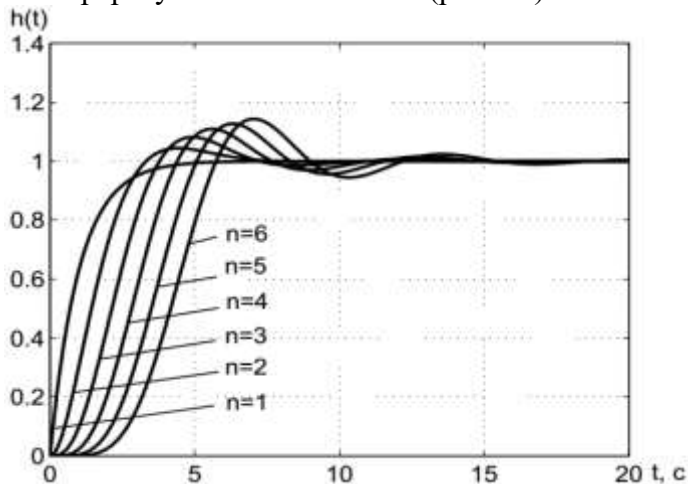


Рис.5.4. Перехідні характеристики моделі Баттєворта

Якщо на основі показників якості визначені необхідні корені характеристичного полінома. Тоді при заданні матриць еталонної моделі на основі діагональної канонічної форми можливі наступні варіанти:

- якщо корені різні і дійсні то

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^* \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

- якщо корені однакової  $n$ - кратності

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda^* & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^* & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^* \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- якщо два корені комплексні  $\lambda_{1,2}^* = \alpha^* \pm i\beta^*$ , а інші дійсні - то

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* & 0 & \dots & 0 \\ -\beta^* & \alpha^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^* \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

При наявності характеристичного полінома моделі

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + a_{n-2}^* \lambda^{n-2} + \dots + a_2^* \lambda^2 + a_1^* \lambda + a_0^*.$$

матриці формуються із коефіцієнтів полінома у вигляді:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0^* \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1^* \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}^* \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 5.2. Синтез управління для режиму стабілізації

Завдання синтезу керуючих впливів методом модального управління формулюється таким чином: для заданого об'єкта управління, що володіє властивістю повної керованості і спостережливості, потрібно знайти таку матрицю лінійних стаціонарних зворотних зв'язків, яка забезпечує замкнутій системі необхідний набір показників якості. Отже, постановка задачі може бути сформульована таким способом:

Дано об'єкт з повною інформацією

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.21)$$

Для режиму стабілізації при

$$e = -x.$$

модель помилок

$$\begin{cases} \square \\ e = Ae - Bu \\ y = -Cx \end{cases}.$$

Знайти керування у вигляді

$$u = Ke$$

для замкнутої системи, динаміки якої описується рівнянням

$$\begin{cases} \square \\ e = Fe. \end{cases}$$

При цьому справеливо

$$F = A - BK$$

та

$$D^* = \det[\lambda I - F] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Алгоритм вирішення задачі

Для знаходження матриці управління і простоти обчислення здійснюється перетворення рівнянь руху об'єкта до керованого канонічного вигляду. Це претворення засноване на введенні нового вектора  $z$

$$z = Px \quad (5.22)$$

Відповідно обернене перетворення буде:

$$x = P^{-1}z. \quad (5.23)$$

Підставляючи (5.23) в рівняння об'єкта отримуємо:

$$\begin{cases} \square \\ P^{-1}z = AP^{-1}z + Bu \\ y = CP^{-1}z \end{cases}$$

Домножимо обі частини цього рівняння на матрицю перетворень  $P$

$$\begin{cases} \square \\ z = PAP^{-1}z + PBu \\ y = CP^{-1}z \end{cases}$$

Вибираючи серед безлічі матриць перетворень  $P$ , таку, яка приводить пару матриць  $A$  і  $B$  до керованої канонічної форми, модель руху об'єкта управління в новому базисі приймас вид:

$$\begin{cases} \square \\ z = A_k z + B_k u \\ y = C_k z \end{cases} \quad (5.24)$$

де  $A_k$ ,  $B_k$  і  $C_k$  -матриці динаміки, входів і виходу об'єкта в канонічній формі.

Таким чином, модель руху заданого об'єкта управління приводиться до канонічної керованої форми, і матриці опису цієї форми мають такий вигляд:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 1], \quad (5.25)$$

де  $a_i$  - коефіцієнти характеристичного полінома заданого об'єкта;  $b_j$  - коефіцієнти чисельника передаточної функції об'єкта управління.

З огляду на керовану канонічну форму об'єкта управління, модель помилок і рівняння управління, опис руху замкнутої системи набуває вигляду:

$$\begin{cases} e = P^{-1}A_kPe - P^{-1}B_ku \\ y = -C_kPe \\ u = K_kPe \end{cases} \quad (5.26)$$

де  $K_k$  -матриця зворотних зв'язків в канонічній формі.

Підставляючи третє рівняння в перше (5.26) отримуємо

$$\begin{cases} e = P^{-1}F_kPe \\ y = -C_kPe \end{cases} \quad (5.27)$$

де  $F_k = A_k - B_kK_k$ .

З рівнянь (5.25) і (5.27) отримуємо матрицю замкнутої системи в канонічній формі

$$F_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - k_{k1} & -a_1 - k_{k2} & -a_2 - k_{k2} & \dots & -a_{n-1} - k_{kn} \end{bmatrix}$$

Характеристичний поліном цієї матриці  

$$D(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} + k_{kn})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 + k_{k2})\lambda + (a_0 + k_{k1}).$$

Для того, щоб коефіцієнти характеристичного полінома замкнутої системи були рівні необхідним, коефіцієнти зворотних зв'язків вибираються з умови рівності коефіцієнтів моделі і системи при відповідних степенях  $\lambda$ , тобто

$$a_i^* = a_i + k_{k(i+1)}$$

Звідси коефіцієнти матриці лінійних стаціонарних зворотних зв'язків знаходяться як

$$k_{k(i+1)} = a_i^* - a_i.$$

Здійснюючи зворотне перетворення до координат початкового базису, отримуємо вираз, що описує замкнуту систему:

$$\begin{cases} \dot{e} = Fe \\ y = -Ce \end{cases},$$

де

$$F = P^{-1}F_kP;$$

$$C = C_kP.$$

Із наведених вище формул видно, що матрицю лінійних стаціонарних зворотних зв'язків простіше знайти в канонічному керованому базисі, а потім отримати її у початковому описі.

### 5.3. Алгоритм знаходження матриць зворотного зв'язку

1. Перевірка пари матриць **A**, **B** на відповідність властивості повної керованості, тобто формування матриці керованості об'єкта управління в вихідному базисі **U** з подальшим визначенням її рангу і його порівняння з порядком об'єкта управління. Якщо ранг матриці керованості дорівнює порядку об'єкта управління, здійснюється перехід до другого етапу. Якщо це не так, то синтез неможливий.

2. Знаходження характеристичного полінома об'єкта управління за допомогою виразу:

$$D(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

або на основі переходу від моделі, заданої в просторі стану, до передавальної функції наступним чином:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{B(s)}{A(s)}$$

3. Перехід від вихідного опису об'єкта управління до керованої канонічної форми, тобто формування матриць  $A_k, B_k$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Знаходження матриці перетворення  $P$ , яка обчислюється як

$$P = U_k U^{-1}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} B_k & A_k B_k & A_k^2 B_k & \dots & A_k^{n-1} B_k \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}.$$

5. Обчислення коефіцієнтів зворотних зв'язків  $k$  в керованому канонічному вигляді:

$$k_{k(i+1)} = a_i^* - a_i$$

6. Знаходження матриці лінійних стаціонарних зворотних зв'язків  $K$  в вихідному базисі

$$K = K_k P$$

7. Виконання перевірного розрахунку, тобто обчислення характеристичного полінома замкнутої системи з подальшим порівнянням з необхідним характеристичним поліномом. При співпадінні поліномів системи і еталонної моделі розрахунок виконано, в іншому випадку необхідно знову здійснити розрахунок матриці лінійних стаціонарних зворотних зв'язків.

8. Здійснення комп'ютерного моделювання замкнутої системи з метою підтвердження правильності виконаного розрахунку, а також визначення форматів значень змінних, що беруть участь в процесі управління.

### Контрольні запитання.

1. Який вигляд моделі САУ в просторі станів?

2. Які переваги модальних регуляторів перед типовими?
3. Які об'єкти відносяться до повністю керованих?
4. Для яких режимів роботи проводять синтез систем модального управління?
5. Яка структура модальних регуляторів?
6. Які способи формування матриць еталонної моделі?
7. З яких умов вибирають стандартні модельні поліноми?

### Приклад 5.1.

Для лінійного об'єкта управління другого порядку з повною інформацією задано передаточну функцію

$$W(s) = \frac{2}{20s^2 + 9s + 1}.$$

Синтезувати модальний регулятор, який забезпечує в замкнутій системі перегулювання  $\sigma = 0$  та час перехідного процесу  $t_n = 10$  с. Система працює в режимі стабілізації.

Рішення.

На основі передавальної функції диференціальне рівняння руху об'єкта в операторній формі:

$$20p^2y + 9py + y = 2u.$$

Обі сторони рівняння ділимо на 20

$$p^2y = -0,45py - 0,05y + 0,1u.$$

Розв'язуємо отримане рівняння відносно змінної  $y$

$$y = -0,45y \frac{1}{p} - (0,05y + 0,1u) \frac{1}{p^2}.$$

Вводимо змінні стану об'єкта  $x_1$  і  $x_2$ , причому  $x_2 = \frac{dy}{dt}$ . Тоді з диференціального рівняння утворюємо систему рівнянь руху об'єкта у просторі станів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0,45x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -0,05x_1 + 0,1u \\ y = x_1 \end{cases}$$

На основі цього рівняння побудуємо структурну схему об'єкта у просторі станів, яка має вигляд:

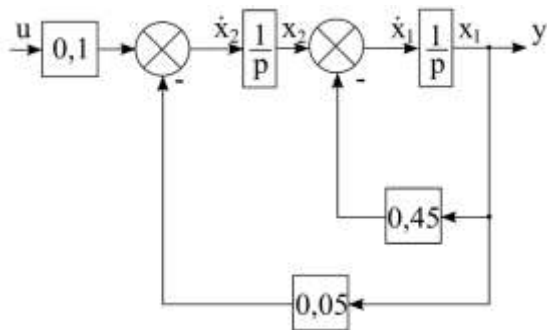


Рис. 5.4. Структурна схема об'єкта.

Систему диференціальних рівнянь у просторі стану прийнято записувати в матрично-векторному виді:.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad \ddot{\phantom{x}}$$

Аналізуючи систему рівнянь у просторі станів приходимо до висновку, що матриці, які описують динаміку об'єкта приймають значення:

$$A = \begin{vmatrix} -0,45 & 1 \\ -0,05 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0,1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так як за умовою задачі перерегулювання повинно бути рівне нулю для побудови еталонної моделі вибираємо характеристичний поліном Ньютоні 2-го порядку у вигляді

$$D^*(\lambda) = \lambda^2 + 2\omega_0\lambda + \omega_0^2.$$

Значення параметра подібності  $\omega_0$  знаходимо за формулою

$$\omega_0 = \frac{t_n}{t_n^*} = \frac{9,5}{4,75} = 2,$$

де  $t_n^* = 4,75\text{с}$  - час перехідного процесу нормованої перехідної функції.

Час перехідного процесу еталонної моделі можна визначити шляхом моделювання



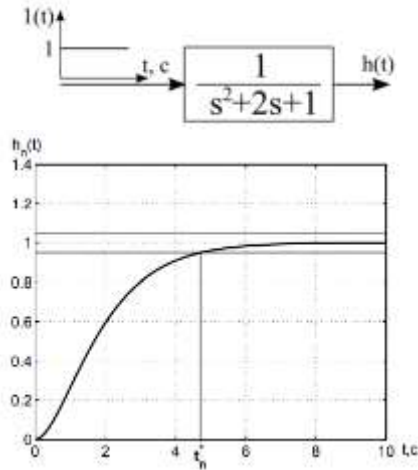


Рис.5.5. До визначення часу перехідного процесу нормованої перехідної функції при  $\omega_0 = 1$ .

Отже, бажаний характеристичний поліном, якому повинна відповідати замкнута система автоматичного регулювання приймає вигляд:

$$D(*\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 16.$$

У загальному випадку модель помилок в матрично-векторному виді:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae - Bu \\ y = -Ce \end{cases}.$$

Характеристичний поліном моделі помилок знаходимо за формулою

$$D(\lambda) = \det[\lambda I - A]$$

де  $I$ - одинична діагональна матриця .

Отже,

$$D(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \lambda + 0,45 & -1 \\ 0,05 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0,45\lambda + 0,05$$

Далі знайдемо матрицю повної керованості моделі помилок

$$U = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix}.$$

Для цього спочатку знайдемо добуток матриць  $AB$

$$AB = \begin{vmatrix} -0,45 & 1 \\ -0,05 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0,1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Тоді

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{vmatrix}$$

Визначник матриці керованості

$$\det U = -0,01.$$

Так як визначник матриці керованості не дорівнює нулю, то система повністю керована

Обчислимо обернену матрицю повної керованості

$$U^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для режиму стабілізації вектор помилок:

$$e = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Керуючу дію знаходимо у формі:

$$u = Ke,$$

Матриця лінійних стаціонарних зворотних  $K$  зв'язків має вигляд

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

Матрицю від'ємних зворотних зв'язків  $K$  шукаємо спочатку в керованому канонічному базисі, а потім здійснюємо перетворення до вихідного базису.

В керованому канонічному базисі модель помилок описується рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_k e - B_k u \\ y = -C_k e \end{cases}$$

де

$$A_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -0,05 & -0,45 \end{vmatrix}, \quad B_k = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad C_k = [0,1 \quad 0]$$

Запишемо вираз для знаходження матриці керованості в керованому канонічному базисі

$$U_k = \begin{vmatrix} B_k & A_k B_k \end{vmatrix}$$

Добуток матриць

$$A_k B_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -0,05 & -0,45 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -0,45 \end{vmatrix}$$

Отже матриця керованості в канонічному базисі

$$U_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,45 \end{vmatrix}$$

Розрахуємо матрицю перетворень між базисами

$$P = U_k U^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,45 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -4,5 & 10 \end{vmatrix}$$

Коефіцієнти матриці від'ємних зворотних зв'язків в канонічній формі знаходимо за формулами:

$$\begin{cases} k_{k1} = a_0^* - a_0 = 16 - 0,05 = 15,95 \\ k_{k2} = a_1^* - a_1 = 8 - 0,45 = 7,55 \end{cases}$$

де  $a_0^*, a_1^*, a_0, a_1$  - коефіцієнти характеристичних поліномів бажаного полінома і полінома еталонної моделі помилок.

Зауважимо, що еталонна модель помилок співпадає з еталонною моделлю системи. Таким чином, матриця від'ємних зворотних зв'язків в канонічній формі:

$$K_k = \begin{vmatrix} k_{k1} & k_{k2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15,95 & 7,55 \end{vmatrix}$$

Матрицю від'ємних зворотних зв'язків в вихідній формі знаходимо за формулою

$$K = K_k P$$

Остаточно, матриця від'ємних зворотних зв'язків

$$K = \begin{vmatrix} 15,95 & 7,55 \\ -4,5 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -4,5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 125,525 & 75,5 \end{vmatrix}$$

На рис. 5.6. наведено структурну схему системи модального керування.

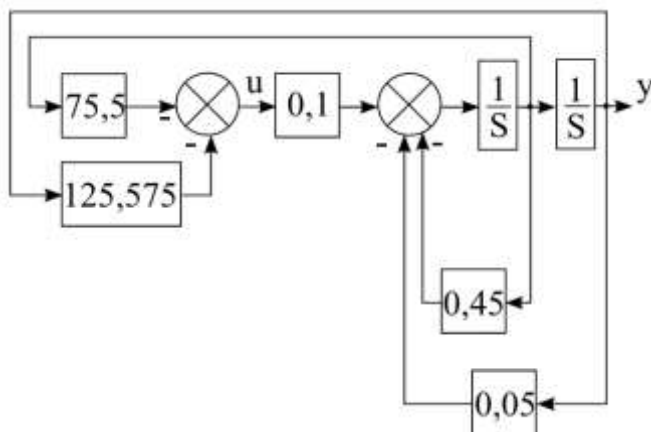


Рис. 5.6. Структурна схема системи модального керування.

Обчислимо матрицю замкнутої системи

$$F = \begin{vmatrix} -0,45 & 1 \\ -0,05 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0,1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 125,525 & 75,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,45 & 1 \\ -12,6025 & -7,55 \end{vmatrix}.$$

Характеристичний поліном матриці співпадає з поліномом бажаної моделі

$$D(\lambda) = \det[\lambda I - F] = \lambda^2 + 8\lambda + 16.$$

Результати розрахунків перевіряємо шляхом комп'ютерного моделювання (ри5.7)

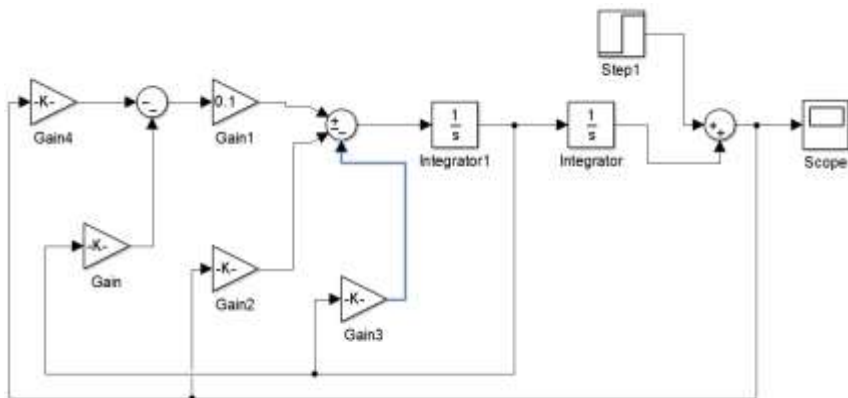


Рис. 5.7. Simulink модель системи з модальним регулятором

В результаті моделювання отримано перехідну характеристику синтезованої системи (рис.5.8)

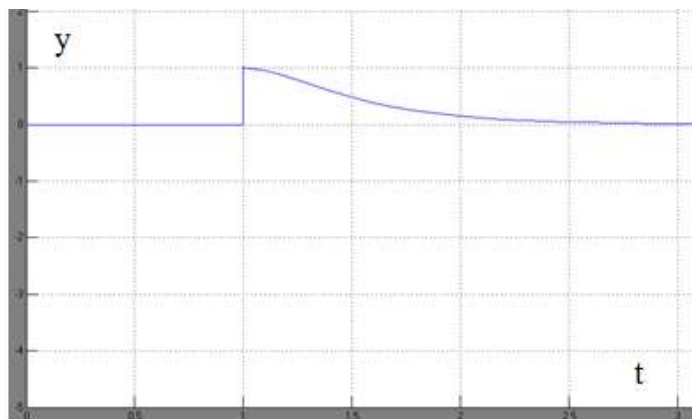


Рис.5.8. Перехідна характеристика синтезованої системи

З рис.5.8 видно, що синтезована система відповідає поставленим вимогам. Перехідний процес аперіодичний час регулювання 2 с.

## Література

1. Наладка средств автоматизации и автоматических систем регулирования / А.С. Клюев, А.Т. Лебедев, С.А. Клюев, А.Г. Товарнов ; под ред. А.С. Клюева. М. : Энергоатомиздат, 1989. 368 с.
2. Копелович А.П. Инженерные методы расчета при выборе автоматических регуляторов. М. : Metallurgizdat, 1960. 190 с.
3. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. М. : Энергия, 1972. 376 с.
4. Сборник задач по основам автоматического регулирования теплоэнергетических процессов / Стефани Е.П. и др. М. : Энергия, 1973. 336 с.
5. Ротач В.Я. Расчет настройки реальных ПИД-регуляторов. *Теплоэнергетика*. 1993. № 10. С. 31-35.
6. Ковела І.М. Параметричний синтез неперервних і цифрових автоматичних систем регулювання з ПІ- та ПІД-регуляторами. *Вісник НУ «Львівська політехніка»*: Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. 2002. № 450. С. 38-50.
7. Ковела. І. М., Древецький В. В., Ковела С. І. Комп'ютеризовані системи керування : монографія. Рівне : Овід, 2017. 672 с.
8. Теория автоматического управления / Под ред. Воронова А. А. М. : Высшая школа, 1986. Ч.1. 367 с.
9. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М. : Наука, 1978. 256 с.
10. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
11. Синтез систем автоматического управления методом модального управления / В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев. С -Пб: СПбГУ ИТМО, 2007. 108 с.
12. Клепач М.І. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Рівне НУВГП, 2007. 206 с.

## ДОДАТОК

\*Фрагмент програми, що реалізовує ПІД-регулювання температури в мікроконтролерах. Період розрахунку 50 мс, давач температури ТС1047А, десятирозрядний АЦП з опорною напругою 5 В\*/

```
float k=5; //коефіцієнт передачі ПІД-регулятора змішаної
структури
float Ti=3.5; //стала часу інтегрування ПІД-регулятора, с
float Td=0.5; //стала часу диференціювання ПІД-регулятора, с
float T0=0.05; //період дискретизації ПІД-регулятора, (50 мс =
0.05 с)
float q0,q1,q2; //коефіцієнти в рекурентному рівнянні ПІД-
регулятора
float u=0,u1; //значення керування на даному кроці циклу
роботи та на попередньому
float sp=60; //завдання ПІД-регулятора
float pv; //поточне значення регульованої величини
float a=100,b=-50; //коефіцієнти, що використовуються для
перетворення вимірюної напруги в одиниці вимірюваної
величини ( $y=a*x+b$ )
/*Функція, що реалізує задачу - ПІД-регулятор в операційній
системі реального часу FreeRTOS з періодом виклику 50 мс */
void vPidTask( void *pvParameters )
{
    float e=0,e1=0,e2; //значення розузгодження  $e=sp-pv$ 
в поточному циклі роботи, попередньому циклі та 2 цикли тому
    float V; //напруга з датчика, виміряна
регулятором
    q0=k*(1+T0/Ti+Td/T0); //обчислення коефіцієнтів в
рекурентному рівнянні ПІД-регулятора
    q1=-k*(1+2*Td/T0-T0/(2*Ti));
    q2=k*Td/T0;
    portTickType xLastWakeTime; //Змінна, необхідна для
реалізації затримок
    xLastWakeTime = xTaskGetTickCount(); //отримання
моменту часу, від якого буде відраховуватись затримка
```

```

while(1)          // Нескінченний цикл
{
    u1=u; //запис значень керування і
розузгодження
    e2=e1; //з попереднього циклу обчислення у
відповідні змінні
    e1=e; //для обчислень на поточному циклі
    V=analogRead(A0)*5.0/1023;//виконання
аналогово-цифрового перетворення та переведення отриманого
результату в Вольти (5.0 - опорна напруга АЦП)
    pv=a*V+b; //масштабування для отримання виміряного
значення в одиницях регульованої фізичної величини
    e=sp-pv; //обчислення розузгодження
    u=u1+q0*e+q1*e1+q2*e2; //обчислення керування
    if(u>100) u=100;
    if(u<0) u=0; // обмеження величини керування
    u=u*255/100; //масштабування сигналу керування для
виводу через 8-бітний вихід
    analogWrite(11,u*255/100); //виведення сигналу
керування через 11-ий вихід
    vTaskDelayUntil( &xLastWakeTime, ( 50 /
portTICK_RATE_MS ) ); //функція затримки, 50 - величина
періоду виклику, мс
//portTICK_RATE_MS - тривалість кванту часу операційної
системи, задається в її налаштуваннях

```